Mathématiques Financières
Exercices

Licence 2, 2015-16 - Université Paris 8

J.CORIS & C.FISCHLER & S.GOUTTE

1 TD 6 : Emprunts et Tableaux damortissements

Exercice 1. Une société a un besoin de financement de 10000 euros sur 4 ans. Le taux dintérêt est de 5%. Dresser le tableau damortissement pour un remboursement in fine.

Exercice 2.

1. Une famille peut consacrer 1600 euros par mois au remboursement dun prêt immobilier dune durée de 240 mensualités au taux annuel 6,5%. Si lorganisme financier emploie pour le calcul des intérêts le taux mensuel proportionnel, quel montant maximum cette famille peut-elle emprunter ? Quel serait ce montant si lon employait le taux mensuel équivalent ? Quel est dans chaque cas le coût de prêt ? Quelle conclusion en tirez-vous ?
2. On emprunte 200000 euros au taux annuel 12%. Le remboursement se fait en 6 mensualités égales. Dresser le tableau damortissement de ce prêt pour des taux mensuels équivalents.
3. On considère un remboursement dun emprunt en n versements de fin de période, de montant a et au taux par période i .
   Montrer que :
   (a) les amortissements forment une suite géomtrique de raison $1 + i$ et de premier terme $a(1 + i)^{-n}$;
   (b) le capital restant dû après le $p$ième versement est $a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$.
4. La onzième ligne dun tableau damortissement dun emprunt remboursable par annuités constantes est

Dette due	**Intérêt**	**Amortissement**
51676,98 euros	5803,22 euros	1941,38 euros

Quel est le taux dintérêt ? Quelle est la durée de lemprunt ?

Exercice 3.

Le crédit renouvelable (ou crédit revolving) est un produit bancaire de plus en plus proposé aux particuliers. Il sagit de prêts que lemprunteur peut utiliser librement sans affectation précise ou de prêts associés à des cartes et consentis pour des achats chez des commerants affiliés (par exemple cartes Cofinoga, Pass de Carrefour, FNAC mais aussi abonnements dans les salles de gymnastique). Dans ce type de prêt, le montant prêté est plafonné : lorganisme de prêt détermine le montant maximal (appelé encore plafond) du prêt en fonction de la capacité de remboursement du client et de la durée souhaitée. Tant que le plafond nest pas atteint lemprunteur peut solliciter un nouveau prêt dont le plafond sera calculé en tenant compte des versements en cours dans les prêts déjà consentis. Quand le plafond est atteint lemprunteur ne peut plus solliciter de prêt sans quoi il dépasse sa capacité de remboursement ; dans ce cas il doit attendre que les remboursements des prêts en cours permettent de revenir sous le plafond. Un particulier peut consacrer 250 euros par mois à des remboursements de prêts. Il sollicite un crédit renouvelable de 12 mois au taux annuel de 10,2%.

1. Sachant que lorganisme de crédit utilise un taux mensuel proportionnel pour le calcul des intérêts, calculer le plafond de ce crédit.
2. Cette personne emprunte 1500 euros pour 12 mois. Quel est le montant dune mensualité de remboursement ?
3. Après la septième mensualité, quelle somme peut-il emprunter sur deux ans ?

2 TD 7 : Options, Future et Produits Dérivés.

Exercice 1.

Rappel : Un contrat à terme, signé à la date 0, liant un acheteur et un vendeur, constitue pour lacheteur lobligation dacheter à la date T un produit financier (appelé sous-jacent) à un prix K fixé à la date 0.

1. Quel est le flux F_T à linstant Tpour lacheteur ?
2. Quel est le flux à linstant Tpour le vendeur ?
3. Quelle est la valeur F_0 sous AOA à l'instant 0 d'un tel contrat ?

Exercice 2.

Le prix forward de 6 mois d'une action de Microsoft est de 39 USD et le taux dintérêt est de 6%. Calculer le prix S_0 à l'instant 0 de l'action et la valeur initiale FC_0 de ce contrat terme pour un acheteur. Si après 3 mois le prix $S_{1/4}$ de l'action est de 35 USD, quelle est la valeur $FC_{1/4}$ du contrat à terme pour lacheteur ?

Exercice 3. Rappeler les bénfice ou les perte à l'échéance donnés par un Call européen en fonction de ces différents paramètres que vous définirer.

3 TD 8 : SWAP de taux.

Exercice 1.

Nous sommes dans le cas d'un SWAP à deux périodes : $n = 2$

Notons R le taux fixe et

- $R_1^{'}$ le taux variable pour la première période.
- $R_2^{'}(\omega)$ la taux variable pour la deuxième période si l'on se trouve dans l'état ω de l'économie à la date 1.

La partie A paie ce qu'on appelle la **jambe fixe** et reoit la **jambe variable**. Cest linverse pour la partie B.

On note : P_f le prix (initial) de la jambe fixe et P_v le prix (initial) de la jambe variable.

1. Quel est le Prix P_f darbitrage de la jambe fixe ?
2. Quel est le Prix P_v darbitrage de la jambe variable ?
3. En déduire le Prix du SWAP P_{swap}
4. Application Numérique : $N = 100$, $R = 5\%$, $B(1) = 1.5$ et $B(2) = 0.5$
5. Que vaut le taux SWAP R_S ?
6. En déduire la valeur des taux variables $R_1^{'}$ et $R_2^{'}(\omega)$.

4 TD 9 : Modèle Binomiale à une période.

On rappel qu'une stratégie sur le marché est représentée par un triplet (α, δ, γ) tels que α représente le montant initial placé dans le cash, δ le nombre de sous-jacent S détenu en $t = 0$ et γ le nombre d'actifs risqués de payoff X π_0 détenu en $t = 0$. La valeur en $t = 0$ du portefeuille vaut alors

$$V_0^{(\alpha,\delta,\gamma)} = \alpha + \delta S_0 + \gamma \pi_0$$

et en $t = 1$

$$V_1^{(\alpha,\delta,\gamma)}(.) = \alpha(1 + R) + \delta S_1(.) + \gamma X(.)$$

Exercice 1.

Si π_0 est le prix d'un call européen, montrer que l'hypothèse d'AOA implique que

$$\pi_0 \leq S_0$$

Exercice 2.

Rappeler ce qu'est une loi de Bernoulli et calculer son espérance.

Exercice 3.

Considérons que le vendeur de l'option effectue une transaction sur l'action en achetant ou vendant une quantité δ. Il crée donc la strateégie suivante $(\alpha, \delta, -1)$.

1. Déterminer la somme d'argent α nécessaire à l'obtention du portefeuille de valeur nulle à la date $t = 0$.
2. Démontrer que sous AOA, on a alors que pour couvrir un call européen il faut acheter des actions S_0. Autrement dit trouver la quantité δ d'actions à acheter pour se couvrir du call.
3. En déduire le prix π_0 du call européen en $t = 0$.
4. Définir une probabilité Q sur l'espace $(\Omega = \{u, d\}, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que le prix se réécrit

$$C = E^Q\left[\frac{(S_1 - K)^+}{1 + R}\right]$$

Exercice 4.

Un fonds de pension possède des obligations d'une entreprise A en difficulté financière. Les obligations sont cotées sur le marché au prix de 1000 euros. On considère que l'entreprise fera faillite au bout d'un an avec probabilité $p = 5\%$. Si l'entreprise ne fait pas faillite, le montant de remboursement pour chaque obligation est de 1100 euros. En cas de faillite, le remboursement est seulement 400 euros.

Pour se protéger contre la faillite de l'entreprise A, le fonds s'adresse à une banque en lui demandant de structurer un produit qui paie 1000 euros en cas de faillite de A et zéro sinon.

Le taux sans risque du marché est de 5%.

1. Quel sera le prix que la banque proposera au fonds ?
2. Comment la banque pourrait-elle annuler son risque ?
3. La banque s'appercoit qu'un compétiteur propose le même produit pour un prix de 50 euros. Décrivez une stratégie d'arbitrage possible.

Exercice 5.

On se place dans un modèle binomial à une période. Les paramètres du modèle sont les constantes S_0, u, d et R telles que $S_0 > 0$, $u > d > 0$ et $R > -1$.

Rappel : On appelle probabilité risque-neutre une probabilité $Q = (q, 1-q)$ telle que $1 > q > 0$ et telle que

$$E^Q\left[\frac{S_1(.)}{1+R}\right] = S_0$$

1. On suppose dans tout l'exercice la relation $u > 1 + R > d$ satisfaite.
   Rappeler l'expression de l'unique probabilité risque-neutre en fonction des paramètres du modèle.
2. Soit $(\alpha, \delta) \in R^2$ une stratégie de portefeuille où α représente la quantité d'argent à la date 0 dans le portefeuille et δ représente la quantité d'actif risqué à la date 0 dans le portefeuille. On note $V(\alpha, \delta)_t$ la valeur à la date t du portefeuille associé à la stratégie (α, δ). Montrer que la valeur $V(\alpha, \delta)_0$ du portefeuille à la date 0 est égale à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de $V(\alpha, \delta)_1$ actualisée.
3. En déduire que le prix de non arbitrage en 0 de tout actif contingent réplicable est égal à l'espérance sous la probabilité risque-neutre du pay-off actualisé. Cette propriété s'appelle principe d'évaluation risque-neutre.
4. En utilisant le principe d'évaluation risque-neutre, redémontrer la relation de parité call-put dans le modèle binomial à 1 période.