

Techniques quantitatives 3

Syllabus et fascicule de travaux dirigés

Chimène Fischler ¹

L2 Economie-Gestion, 2020-2021

Université Paris 8, Vincennes - Saint-Denis

Contenu du module : Le cours d'algèbre linéaire est une introduction à l'étude des matrices et à l'utilisation du pivot de Gauss. Le plan du cours est le suivant :

- Chapitre 1 : Ensembles et espaces vectoriels.
- Chapitre 2 : Matrices.
- Chapitre 3 : Systèmes d'équations linéaires.
- Chapitre 4 : Applications linéaires.
- Chapitre 5 : Rang, déterminant et inverse.
- Chapitre 6 : Diagonalisation.

Evaluation :

- Contrôle continu (40% de la note finale) : un partiel le jeudi 5 novembre 2020.
- Contrôle terminal (60% de la note finale) : un examen en janvier 2021.

Remarques importantes :

1. Etant donné le contexte sanitaire, tout étudiant présentant des symptômes évocateurs du COVID, ou étant cas contact, doit respecter les règles en vigueur d'éviction sociale. Il est formellement interdit de venir à l'université dans ce cas.
2. Les documents, notes de cours et matériels électroniques (téléphones portables, calculatrices, ...) sont INTERDITS aux examens.
3. L'assiduité aux TD est obligatoire, sauf dispense pour raisons professionnelles établie auprès du secrétariat, ou suspicion de COVID (cf 1.) ;
4. Toute absence au contrôle continu (sauf suspicion de COVID, cf 1.) entraîne l'exclusion de la session 1.
5. Les changements de groupe ne sont pas autorisés.

Bibliographie indicative :

- Introduction à l'algèbre linéaire, Ozgür Gün et Sophie Jallais, PUF.
- Mathématiques en économie-gestion, Stéphane Rossignol, Dunod.
- Mathématiques pour économistes, Carl P. Simon et Lawrence Blume, De Boeck.
- Algèbre linéaire pour économistes, Bernard Guerrien, Economica.
- Mathématiques de base pour économistes, Yadolah Dodge, Springer.

Annales : Certains sujets de partiels ou d'examens, ainsi que les corrigés et les barèmes correspondants, sont disponibles sur la page web suivante : <http://famille.fischler.free.fr/>

1. Adresse email : famille.fischler@gmail.com

Organisation et calendrier

Au vu de la situation sanitaire, le cours se déroulera (jusqu'à nouvel ordre) de façon hybride :

- Le cours magistral en vidéo sera mis en ligne sur Moodle.
- Les TD auront lieu en présentiel. Chaque TD portera sur le cours mis en ligne quelques jours avant.

Si la situation sanitaire venait à se dégrader, les TD seraient assurés à distance (suivant des modalités à définir) et, dans la mesure du possible, les évaluations seraient maintenues en présentiel (si le contexte sanitaire ne le permet plus, elles auront lieu à distance via Moodle). La priorité sera donnée au respect du calendrier ci-dessous, de manière à couvrir l'intégralité du programme prévu.

Les TD sont répartis de la manière suivante afin de limiter au maximum les risques de contamination :

- Groupe Finance : de 8h30 à 11h30 les jeudis 24/9, 8/10, 22/10, 12/11, 26/11, 10/12, en amphi A2.
- Groupe Gestion : de 8h30 à 11h30 les vendredis 18/9, 2/10, 16/10, 6/11, 20/11, 4/12, en salle J102.
- Groupe Gestion Eco-Fi : de 8h30 à 11h30 les vendredis 25/9, 9/10, 23/10, 13/11, 27/11, 11/12, en salle J102.

Le contrôle continu a lieu pour tous les groupes le jeudi 5 novembre.

Les exercices les plus importants (en vue de l'examen et du contrôle) ont été marqués d'un losange noir ♦. Ils devront avoir été particulièrement bien compris.

Il est indispensable de vous inscrire, dès que possible, à l'espace de cours TQ3 de votre ENT e-p8 avec la clef d'inscription suivante : TECHQ3 Des informations supplémentaires et importantes pourront vous être communiquées par ce biais.

FEUILLE N° 1 : ENSEMBLES ET ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 - Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les ensembles suivants :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 4x - 7\}, \\ D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 4x\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = (x - 1)^2 + 1\}.$$

Déterminer $D_1 \cap D_2$, $D_1 \cap C$, $D_2 \cap C$ et $D_1 \cap D_3$.

Exercice 2 - Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère deux parties A et B définies par :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - xy - 2y^2 = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}.$$

- Démontrer que $B \subset A$.
- Montrer que $A \neq B$.
- Factoriser $x^2 - xy - 2y^2$ par $x + y$. En déduire un ensemble C tel que $A = B \cup C$.

Exercice 3 - ♦ Dans chacun des cas suivants, dire si la partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; lorsque c'est le cas, pouvez-vous déterminer une famille génératrice de E ? une base de E ?

- (a) $E = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\}$ (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - xy = 0\}$
(c) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$ (d) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - t = 1\}$
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$ (f) $E = \{(\alpha, \alpha + \beta, -\beta) \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
(g) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + \lambda z = 0\}$ (h) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = \lambda\}.$

Dans les cas (g) et (h), λ désigne un paramètre réel.

Exercice 4 - ♦ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs $u = (1, -2, 0, 3)$, $v = (-1, 2, 1, -1)$, $w = (1, 3, -2, 0)$. Calculer les combinaisons linéaires $2u + v + w$, $2(u + v) + w$, $u - v + 3w$. Déterminer un vecteur x tel que $2u - v + x = 2x + w$. Trouver des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$ ait ses deux dernières composantes nulles. Existe-t-il des réels μ_1, μ_2, μ_3 non tous nuls tels que $\mu_1 u + \mu_2 v + \mu_3 w$ soit nul ?

Exercice 5 - Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (0, 2, 3, 0)$ et $u_3 = (2, 1, 1, 2)$. Déterminer une base de E . Dans cette base, donner les coordonnées du vecteur $v = (2, -2, -5, 2)$ puis celles du vecteur $(1, 1, 1, 1)$.

FEUILLE N° 2 : MATRICES

Exercice 1 - Dans chacun des cas suivants, déterminer a, b, c, d pour que les deux matrices soient égales :

$$(a) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-3d & -d \\ 2a+d & a+b \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ c-d & d-a \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 - Calculer :

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T \quad (c) 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 - Déterminer les nombres s et t pour que les matrices suivantes soient symétriques :

$$(a) \begin{bmatrix} s & t \\ st & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$$

Exercice 4 - ♦ Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice A :

$$(a) \left(3A^T + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \left(2A^T - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = 4A - 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 - ♦ Calculer les produits matriciels suivants :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}$$

FEUILLE N° 3 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 - ♦ Transformer les matrices suivantes en leur forme ligne-échelle réduite :

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 - ♦ Trouver les solutions (si elles existent) des systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2y - 6x = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ x - y + 3z = 5 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y - 4z = 10 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 3 - ♦ Déterminer en fonction des paramètres a, b, c le nombre de solutions de chacun des systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + by = -1 \\ ax + 2y = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + y = b \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + y - z = a \\ 2y + 3z = b \\ -z = c \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + ay = 0 \\ y + bz = 0 \\ z + cx = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 - Déterminer en fonction du paramètre a les solutions de chacun des systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 6z = 0 \\ 2x + 3y + az = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 - ♦ Pour chacun des systèmes linéaires suivants, exprimer l'ensemble des solutions comme somme d'une solution particulière et d'une solution du système homogène associé.

$$(a) \begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 - Donner une base de l'espace des solutions de chacun des systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

FEUILLE N° 4 : APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 - ♦ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui le sont, déterminer le noyau et l'image, dire si l'application est injective, surjective, bijective et écrire la matrice de l'application dans les bases canoniques.

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$.

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y + 1$.

d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x - y + z)$.

Exercice 2 - ♦ On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x - 3y, -2x + 5y - 2z, 3y + z).$$

a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

b) Donner une base et la dimension de $\text{Im} f$.

c) En déduire la dimension de $\text{Ker} f$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3 - Notons A la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

et $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont A est la matrice dans les bases canoniques.

a) Calculer $f(-1, 2, 0, 3)$ et $f(0, 1, 0, 2)$.

b) Calculer $f(x, y, z, t)$ pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

FEUILLE N° 5 : RANG, DÉTERMINANT ET INVERSE

Exercice 1 - Trouver le rang des matrices suivantes :

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 - ♦ A l'aide du pivot de Gauss, démontrer que les matrices suivantes sont inversibles et trouver leur inverse :

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 - ♦ Résoudre les systèmes linéaires suivants en trouvant l'inverse de la matrice des coefficients :

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - 4y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y = 0 \\ y + w = -1 \\ x + w = 2 \end{cases}$$

Exercice 4 - Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$(a) \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}$$
$$(e) \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & p \\ 0 & c & q & k \\ d & s & t & u \end{bmatrix}$$

Exercice 5 - Evaluer les déterminants des matrices suivantes en les mettant sous forme triangulaire supérieure :

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 - ♦ Trouver les matrices adjointes des matrices suivantes, et en déduire leurs inverses :

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 - ♦ En utilisant les déterminants, trouver les valeurs réelles de c pour lesquelles les matrices suivantes sont non singulières :

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Exercice 8 - ♦ En utilisant la règle de Cramer :

(a) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

(b) Trouver la valeur de x pour laquelle on peut avoir : $\begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 6x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

FEUILLE N° 6 : DIAGONALISATION

Exercice 1 - ♦ Démontrer que la matrice suivante est diagonalisable, calculer ses valeurs propres et déterminer une base de vecteurs propres :

$$\begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 - Notons A la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 20 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. Démontrer que 2 et 3 sont des valeurs propres de A , et déterminer leurs multiplicités respectives.
3. Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de A relatif à la valeur propre 2 ; puis reprendre cette question avec la valeur propre 3.
4. La matrice A a-t-elle d'autres valeurs propres que 2 et 3 ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 - Notons B la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -5 & 9 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de B .
2. En déduire la liste des valeurs propres de B . Préciser la multiplicité de chacune d'entre elles.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
4. La matrice B est-elle diagonalisable ?