

## EXAMEN 2ÈME SESSION

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.***Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (-x + 2y + z, 3x - y + 2z, x + 3y + 4z).$$

- Ecrire la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.
- Donner une famille génératrice de  $\text{Im}f$ . Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de  $\text{Im}f$ .
- En déduire la dimension de  $\text{Ker}f$ , et donner une base de  $\text{Ker}f$ .
- L'application  $f$  est-elle injective? Surjective?

**Exercice 2** - Considérons la matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ .

- Démontrer que  $A$  est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
- En déduire la solution du système linéaire suivant : 
$$\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - 3z = 7 \end{cases}$$

**Exercice 3** - Déterminer la/les valeur(s) réelle(s) de  $c$  pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} -c-5 & 2 & -1 & c+4 \\ -4 & -c+1 & c & 4 \\ -c+1 & 1 & c-2 & 2c-2 \\ 8 & c-2 & 0 & c-8 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 4** - Dans cet exercice, on considère la matrice  $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

- Calculer la matrice adjointe de  $B$ .
- En déduire l'inverse de  $B$ .

**Exercice 5** - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de  $y$  dans la solution du

$$\text{système linéaire } \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = -2 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 6** - Considérons la matrice  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

- Déterminer le polynôme caractéristique de  $C$ .
- Calculer les valeurs propres de  $C$ , et préciser leur multiplicité.
- Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
- La matrice  $C$  est-elle diagonalisable?