Corrigé de l'examen de TQ3

exercice 1:

a) On a: $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$

d'où $A_f=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&1\\0&3&5\end{pmatrix}$

b) On a: $X\in\operatorname{Ker}f \Leftrightarrow AX=0$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+3z=0\\-x+2y+z=0\\3y+5z=0\end{cases}$$

On résoud le système homogène à l'aide de la méthode du pivot de Gauss sur la matrice A_f:

$$\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&1\\0&3&5\end{pmatrix}$$

$$L_1+L_2\begin{pmatrix}1&1&4\\-1&2&1\\0&3&5\end{pmatrix}$$

$$L_2+L_1\begin{pmatrix}1&1&4\\0&3&5\\0&3&5\end{pmatrix}$$

$$L_3-L_2\begin{pmatrix}1&1&4\\0&\boxed{3}&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}L_2\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&5/3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$L_1-L_2\begin{pmatrix}1&0&7/3\\0&1&5/3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases}x+7/3z=0\\y+5/3z=0\\z\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-7/3z\\y=-5/3z\\z\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix}-7/3\\-5/3\\1\end{pmatrix}$ avec $z\in\mathbb{R}$.

Une base de $\mathrm{Ker} f$ est donc $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

c) On en déduit par le thm du rang que :

$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

d'où $\dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2$

donc le rang de f est 2.

Comme $\mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$ et que $\dim \mathrm{Im} f = 2$,

une base de $\mathrm{Im} f$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ car les deux vecteurs sont non colinéaires.

d) Comme $\dim \mathrm{Ker} f = 1$, $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

Comme $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 2 :

1) On applique le pivot de Gauss pour calculer l'inverse (s'il existe) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 9 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 9 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 4L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1+3L_3 \\ L_2+\frac{5}{2}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -11 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & -17/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ -5/2 & -17/2 & 9/2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

<u>vérif:</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ -5/2 & -17/2 & 9/2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ ok!}$$

2) On en déduit :

$(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ -5/2 & -17/2 & 9/2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 3 :</u>

Calculons le déterminant de cette matrice (que l'on note C) :

$$\begin{vmatrix} (c+3) & 6 & 2 & -4 \\ (c+7) & (2c+16) & 5 & (-c-10) \\ (c-2) & (c+1) & c & -c \\ -2 & (-2c-3) & -1 & (c+2) \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1+2L_4 \\ L_2+5L_4 \\ L_3+cL_4 \end{array} \begin{vmatrix} (c-1) & -4c & 0 & 2c \\ (c-3) & (-8c+1) & 0 & 4c \\ (-c-2) & (-2c^2-2c+1) & 0 & (c^2+c) \\ -2 & (-2c-3) & -1 & (c+2) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\times(-1)^{4+3} \times \begin{vmatrix} (c-1) & -4c & 2c \\ (c-3) & (-8c+1) & 4c \\ (-c-2) & (-2c^2-2c+1) & (c^2+c) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-\frac{1}{2}(c+1)L_1 \end{array} \begin{vmatrix} (c-1) & -4c & 2c \\ (-c-1) & 1 & 0 \\ \left(-\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2}\right) & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2c)\times(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} (-c-1) & 1 \\ \left(-\frac{1}{2}c^2-c-\frac{3}{2}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

$$|C| = 2c \times \left[(-c-1)\times 1 - \left(-\frac{1}{2}c^2 - c - \frac{3}{2}\right)\times 1 \right]$$

$$= 2c \times \left(-\cancel{c} - 1 + \frac{1}{2}c^2 + \cancel{c} + \frac{3}{2} \right)$$

$$= 2c \left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} \right) = 2c \times \frac{1}{2} \times (c^2+1)$$

$$= c(c^2+1)$$

donc $\det C \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$ car $c^2+1 > 0$.

Ainsi C inversible ssi $c \neq 0$.

Exercice 4:

1) On a:

$$\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} (3\times(-2) - (-1)\times 1) & -((-1)\times(-2) - 1\times 1) & ((-1)(-1) - 1\times 3) \\ -(2\times(-2) - (-1)(-1)) & (1\times(-2) - 1\times(-1)) & -(1\times(-1) - 1\times 2) \\ (2\times 1 - 3\times(-1)) & -(1\times 1 - (-1)(-1)) & (1\times 3 - (-1)\times 2) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2)
On sait que $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \times \operatorname{adj} B$

On, $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{matrix} \\ L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= 5 \times (-1) - (-3) \times 0$

$= -5.$

donc $B^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

On a: $(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d'où $y = \frac{\det A_2}{\det A}$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

or, $\det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1+3L_3 \\ L_2-L_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 13 & 16 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 13 & 16 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$

$= 13 \times (-7) - (-4) \times 16$

$= -91 + 64 = -27$

et $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2-L_3}{\overset{L_1+3L_3}{=}} \begin{vmatrix} 13 & 16 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 13 & 16 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$

$= 13 \times (-3) - (-4) \times 16$

$= -39 + 64 = 25$

d'où $y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{-27}{25}$

Exercice 6 :

1) On a : $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I)$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \times 2$

$= -2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4$

$= \lambda^2 + \lambda - 6$

2) On a : $P_C(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$

$\lambda = \dfrac{-1 \pm 5}{2 \times 1} = -3$ ou 2

donc $P_C(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-2)$

C a donc 2 valeurs propres simples distinctes : $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$.

3) Pour $\lambda_1 = -3$, $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3x \\ 2x - 2y = -3y \end{cases} \Leftrightarrow 4x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -y$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$

On pose alors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et e_1 est une base de E_1 car λ_1 est de multiplicité 1.

Pour $\lambda_2 = 2$, $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=2x \\ 2x-2y=2y \end{cases} \Leftrightarrow -x+2y=0$

$\Leftrightarrow x = 2y$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$

on pose alors $e_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et e_2 est une base de E_2 car λ_2 est de multiplicité 1.

4) C'est diagonalisable car C possède 2 valeurs propres simples distinctes.