

EXAMEN

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.***Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y + 3z, -x + 2y + z, 3y + 5z).$$

- 1/4
- 10,5 a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
 14,5 b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et sa dimension.
 14,5 c) En déduire le rang de f , puis une base de $\text{Im } f$ en précisant sa dimension.
 10,5 d) L'application f est-elle injective? Surjective?

13,5 **Exercice 2** - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

- 13 1. Démontrer que cette matrice A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
- 10,5 2. En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = -2 \\ x - 3z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer la (ou les) valeur(s) réelle(s) de c telle(s) que la matrice suivante soit inversible :

12,5
$$\begin{bmatrix} c+3 & 6 & 2 & -4 \\ c+7 & 2c+16 & 5 & -c-10 \\ c-2 & c+1 & c & -c \\ -2 & -2c-3 & -1 & c+2 \end{bmatrix}$$

14 **Exercice 4** - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

- 12,5 1. Calculer la matrice adjointe de B .
 11,5 2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de y dans la solution du

12,5 système linéaire
$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 1 \\ -x + 2y + z = -2 \\ 3x + 5y + z = 5 \end{cases}$$

13,5 **Exercice 6** - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

- 14,5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de C .
 10,5 2. Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
 14 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
 10,5 4. La matrice C est-elle diagonalisable?