

EXAMEN DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Durée : 2 heures

Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème est donné à titre indicatif. Des tables de lois statistiques sont disponibles à la fin de l'énoncé.

Exercice 1 - (7 points) Le tableau suivant donne la taille X et le poids Y des athlètes d'un club d'escalade.

Taille x_i en m	Poids y_i en kg
1,78	82
1,65	63
1,82	90
1,68	62
1,75	69
1,78	72
1,90	95
1,60	56
1,72	68
1,80	84

1. Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $Cov(x, y)$.
2. Calculer le coefficient de corrélation r , et interpréter le résultat obtenu.
3. (a) En utilisant la méthode MCO, calculer les coefficients $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de la droite de régression de Y selon x .
 (b) Un nouvel athlète, qui mesure 1m74, s'inscrit au club. Donner une estimation de son poids.
 (c) En réalité l'athlète de la question (b) pèse 84kg. Pourquoi l'estimation précédente n'est-elle pas exacte ?
4. Effectuer le test du coefficient de corrélation linéaire de Student au seuil de signification de 5 %.
5. Calculer des intervalles de confiance de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ au seuil de signification de 5 %.
6. Retrouver le résultat de la question 4 en effectuant un test de Fisher au seuil de signification de 5 %.

Exercice 2 - (9 points) Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Calculer la matrice jacobienne de la fonction f suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 e^{x_2}}{x_3 + 5}, \frac{\ln(x_4)}{x_2}, \sqrt{x_1} + x_2 x_3 x_4 \right).$$

2. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\frac{x^3+x^2e^x+2}{x^2+x+2}$.
3. En intégrant par parties, calculer $\int_1^e x^3 \ln(x) dx$.
4. En utilisant la formule de changement de variable, calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$.
5. Démontrer que l'intégrale généralisée suivante est convergente : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$.

Exercice 3 - (4 points) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + 2y^2 + 1}.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) éventuel(s) de f .
3. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour qu'on ait

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + ay)^2 + by^2.$$

4. En déduire la nature du/des point(s) critique(s) déterminé(s) à la question 2.

Annexe : tables de lois statistiques

Table de Student

ddl\proba	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,328
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93
13	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,646
18	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,08	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,5	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,45
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,385
60	1,296	1,671	2	2,39	2,66	3,232
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
120	1,289	1,658	1,98	2,358	2,617	3,16

Table de Fisher au seuil de 5%

n1 \ n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	60	120
1	161,446	18,513	10,128	7,709	6,608	5,987	5,591	5,318	5,117	4,965	4,543	4,351	4,242	4,171	4,001	3,920
2	199,499	19,000	9,552	6,944	5,786	5,143	4,737	4,459	4,256	4,103	3,682	3,493	3,385	3,316	3,150	3,072
3	215,707	19,164	9,277	6,591	5,409	4,757	4,347	4,066	3,863	3,708	3,287	3,098	2,991	2,922	2,758	2,680
4	224,583	19,247	9,117	6,388	5,192	4,534	4,120	3,838	3,633	3,478	3,056	2,866	2,759	2,690	2,525	2,447
5	230,160	19,296	9,013	6,256	5,050	4,387	3,972	3,688	3,482	3,326	2,901	2,711	2,603	2,534	2,368	2,290