

EXAMEN 2ÈME SESSION

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.***Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (-x + 3y + 5z, 2x - y - 3z, 3x + y - z).$$

- Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
- Donner une famille génératrice de $\text{Im} f$. Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de $\text{Im} f$.
- En déduire la dimension de $\text{Ker} f$, et donner une base de $\text{Ker} f$.
- L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

- Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
- En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} -x + y = -5 \\ -x - 2y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} c-5 & 2 & 3 & -5 \\ c-6 & 6 & -c+9 & c-14 \\ c+10 & -c-6 & -9 & c+16 \\ c+10 & -c-4 & -c-6 & 2c+11 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4 - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

- Calculer la matrice adjointe de B .
- En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de x dans la solution du système linéaire
$$\begin{cases} -x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 11 \\ x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

- Déterminer le polynôme caractéristique de C .
- Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
- Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
- La matrice C est-elle diagonalisable ?