PARTIEL

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 -

- (a) Démontrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3xy - z^2 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Démontrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Donner une base du sous-espace vectoriel F en précisant sa dimension.
- (d) Démontrer que le vecteur $u = (1, 2, 1)$ appartient à F , et déterminer ses coordonnées dans la base obtenue à la question précédente.

Exercice 2 - Calculer $2A^T - BC$, où A , B et C sont les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 - A l'aide du pivot de Gauss, mettre sous forme ligne-échelle réduite la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 11 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -8 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4 - Résoudre le système suivant en exprimant l'ensemble des solutions comme somme d'une solution particulière et d'une solution du système homogène associé :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 5y + z = -2 \\ -3x + 9y + z = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 - Résoudre le système suivant en fonction des paramètres réels a et b :

$$\begin{cases} ax - 2y = -1 \\ 2x + y = b \end{cases}$$