

EXAMEN

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - 2y, -3x + y - 5z, 2x - 3y + z).$$

- Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
- Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et sa dimension.
- En déduire le rang de f , puis une base de $\text{Im } f$ en précisant sa dimension.
- L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

- Démontrer que cette matrice A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
- En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} -c & c-2 & -c+1 & c-1 \\ -c+1 & c-3 & -c+2 & c-3 \\ 1 & c-7 & 2 & -c+4 \\ 2c-4 & -c+6 & 2c-7 & -3c+12 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4 - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

- Calculer la matrice adjointe de B .
- En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de z dans la solution du système linéaire
$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 2 \\ 4x - 5y + z = 7 \\ -x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

- Déterminer le polynôme caractéristique de C .
- Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
- Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
- La matrice C est-elle diagonalisable ?