

PARTIEL DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Trouver les extrema éventuels de la fonction $f(x) = (x - 3)^2(4x + 3)$ et en déterminer la nature.
2. Etudier la convexité de la fonction $g(x) = \exp(-\sqrt{x})$ sur $]0, +\infty[$.
3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\frac{xe^x + \ln(x)}{x^2 + x \ln(x) + x}$.
4. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h(x) = \ln(1 + 3x)$.
5. Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 de la fonction $j(x) = \exp(-2x)$.
6. Calculer la matrice jacobienne de la fonction f suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1^2 \cos(x_2)}{x_4 + 2}, \ln(x_3) \sqrt{x_4}, x_1 x_3^2 e^{3x_4} \right).$$

Exercice 2 - Dans ce problème on considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + xy - x^2}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. En déduire le gradient ; montrer que f possède un et un seul point critique, et le préciser.
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
5. (a) Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x, 0)$ admet en $x = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
(b) Notons h la fonction définie par $h(x) = f(x, 2x)$. Démontrer qu'elle admet en $x = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
(c) Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local pour la fonction f ?