EXAMEN 2ÈME SESSION

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - 2y + 4z, 2x + y - 2z, 4x - 3y + 6z).$$

a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

b) Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$. Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im} f$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker} f$, et donner une base de $\mathrm{Ker} f$.

d) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
2. En déduire la solution du système linéaire suivant : $\begin{cases} -x + 2z = 5 \\ 2x + y - z = -3 \\ 3x + y - 2z = -5 \end{cases}$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} -c+2 & c-4 & -c+3 & c-3 \\ -c+3 & c-5 & -c+4 & c-5 \\ 1 & c-1 & 2 & -c-2 \\ 2c-2 & -c+4 & 2c-2 & -3c+4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4 - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer la matrice adjointe de B.
2. En déduire l'inverse de B.

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de z dans la solution du système linéaire $\begin{cases} -x + 5y + z = -2 \\ -x - 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$

Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de C.
2. Calculer les valeurs propres de C, et préciser leur multiplicité.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
4. La matrice C est-elle diagonalisable ?