Corrigé du partiel

Exercice 1 :

(a) $E \subset \mathbb{R}^2$ et : 1) $0 \in E$ car $2\times 0 - 0^2 = 0$

2) Soient $X = (x,y)$ et $X' = (x',y') \in E$ donc $\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ 2y' - x'^2 = 0 \end{cases}$

On a : $X + X' = (x+x', y+y')$

d'où $2(y+y') - (x+x')^2 = 2y + 2y' - x^2 - x'^2 - 2xx'$

$= \underbrace{(2y - x^2)}_{=0} + \underbrace{(2y' - x'^2)}_{=0} - 2xx'$

$= -2xx'$

donc $X + X' \notin E$ en général $\qquad \neq 0$ en général

3) Soient $X = (x,y) \in E$ tq $2y - x^2 = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$

d'où $2\lambda y - (\lambda x)^2 = 2\lambda y - \lambda^2 x^2$

$= \lambda\underbrace{(2y - x^2)}_{=0} + \lambda x^2 - \lambda^2 x^2$

$= \lambda x^2 (1 - \lambda)$

$\neq 0$ en général

donc $\lambda X \notin E$ en général

Donc E n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

(b) $F \subset \mathbb{R}^3$ et : 1) $0 \in F$ car $2\times 0 - 3\times 0 + 0 = 0$

2) Soient $X = (x,y,z)$ et $X' = (x',y',z') \in E$ donc $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 2x' - 3y' + z' = 0 \end{cases}$

On a : $X + X' = (x+x', y+y', z+z')$

d'où $2(x+x') - 3(y+y') + (z+z') = \underbrace{(2x - 3y + z)}_{=0} + \underbrace{(2x' - 3y' + z')}_{=0}$

$= 0$

Donc $X + X' \in F$

3) Soient $X=(x,y,z) \in E$ tq $2x-3y+z=0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a: $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$

d'où $2\lambda x - 3\lambda y + \lambda z = \lambda(\underbrace{2x-3y+z}_{=0})$

$=0$

Donc $\lambda X \in F$

Finalement, F est un sev de $\mathbb{R}^3$

(c) Soit $X=(x,y,z) \in F$ alors $2x-3y+z=0$

Donc $z=-2x+3y$

Soit $X = (x,y,z)$

$= (x,y,-2x+3y)$

$= (x,-2x,0) + (0,y,3y)$

$= x(1,0,-2) + y(0,1,3).$

On pose $f_1=(1,0,-2)$ et $f_2=(0,1,3)$.

Par construction, $F=\langle f_1, f_2\rangle$ et f_1, f_2 non colinéaires, donc libres,

donc f_1, f_2 est une base de F et $\dim F = 2$.

(d) $u \in \mathbb{R}^3$ et $2\times 1 - 3\times 1 + 1 = 0$ donc $u \in F$.

donc $u = a f_1 + b f_2$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ $\iff \begin{cases} 1=a \\ 1=b \\ 1=-2a+3b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ 1=-2+3 \text{ ok} \end{cases}$

d'où $u = f_1 + f_2$.

exercice 2 :

$$3A^T = 3\times\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T$$

$$= 3\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -9 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

et $BC =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où $$3A^T + 2BC = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -5 & -3 \\ -14 & 11 & -10 \\ 15 & -14 & 21 \end{pmatrix}$$

exercice 3 :

On applique le pivot de Gauss à la matrice A pour la mettre sous forme ligne-échelle réduite :

$$\begin{pmatrix} \boxed{-3} & -9 & 6 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 7 & 10 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & -6 & -12 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_1/(-3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 7 & 10 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & -6 & -12 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2-L_1 \\ L_3+L_1 \\ L_4-2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2/2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3+L_2 \\ L_4+2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3/(-1) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4+4L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4/(-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1-3L_4 \\ L_2-2L_4 \\ L_3+L_4 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_2-3L_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1+2L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

exercice 4:

On a:
$$(S)\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ -2x+y+2z=1 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$$

On lui associe la matrice augmentée suivante à laquelle on applique le pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{5} & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2/5 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-3L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & \boxed{-2/5} & -2/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3/(-\frac{2}{5}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1-L_3 \\ L_2-\frac{4}{5}L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

donc $(S) \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ donc il y a une unique solution.

exercice 5:

On a: (S) $\begin{cases} x+ay=3 \\ 2x-by=-1 \end{cases}$

On lui associe la matrice augmentée suivante à laquelle on applique le pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 2 & -b & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & -b-2a & -7 \end{array}\right)$$

- si $-b-2a=0 \Leftrightarrow b=-2a$, alors:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

donc (S) n'a aucune solution car $0x+0y=0\neq 7$.

- sinon $-b-2a\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -2a$ alors:

$$\begin{array}{c} \\ L_2/(-b-2a) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2a+b} \end{array}\right)$$

$$3-\frac{7a}{2a+b}=\frac{6a+3b-7a}{2a+b}=\frac{-a+3b}{2a+b}$$

$$L_1-aL_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-a+3b}{2a+b} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2a+b} \end{array}\right)$$

donc (S) a une solution unique: $\begin{cases} x=\frac{-a+3b}{2a+b} \\ y=\frac{7}{2a+b} \end{cases}$