

Corrigé de l'examen

Exercice 1.

a) On a: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'où $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) On a: $X \in \text{Ker } f \Leftrightarrow A_f X = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

On résout le système homogène à l'aide de la méthode du pivot de Gauss sur la matrice A_f :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 10 & -16 \end{pmatrix}$$

$$L_2/5 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 10 & -16 \end{pmatrix}$$

$$L_3 - 10L_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 + 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} x - \frac{z}{5} = 0 \\ y - \frac{8z}{5} = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z/5 \\ y = 8z/5 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow X = z \begin{pmatrix} 1/5 \\ 8/5 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}.$

(2)

Une base de $\text{Ker } f$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\dim \text{Ker } f = 1$.

c) On en déduit par le théorème du rang que :

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\text{d'où } \dim \text{Im } f = 3 - 1 = 2.$$

donc le rang de f est 2.

Comme $\text{Im } f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et que $\dim \text{Im } f = 2$,

une base de f est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ car les deux vecteurs sont non colinéaires.

d) Comme $\dim \text{Ker } f = 1$, $\text{Ker } f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

Comme $\dim \text{Im } f = 2$, $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 2:

1) On applique le pivot de Gauss pour calculer l'inverse (s'il existe):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-L_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_2 + 2L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_3 - 4L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 & -4 & -7 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & 0 & -11 & -8 & -14 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 & -4 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_1 - 2L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 & -4 & -7 \end{array} \right]$$

donc A est inversible et $A^{-1} = - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Vérif: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ok!

2) On en déduit :

$$(S) \Leftrightarrow AX = B \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3:

Calculons le déterminant de cette matrice (que l'on note C):

$$\begin{vmatrix} -c+3 & 2c+3 & -2c-3 & c+1 \\ 2c-4 & 2c+2 & -3c-1 & c+1 \\ -c-2 & c+1 & c+5 & -1 \\ 0 & c & -3c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c+3 & 2c+3 & \overset{C_3+3C_2}{4c+6} & \overset{C_4-C_2}{-c-2} \\ 2c-4 & 2c+2 & 3c+5 & -c-1 \\ -c-2 & c+1 & 4c+8 & -c-2 \\ \textcircled{0} & \textcircled{c} & \textcircled{0} & \textcircled{0} \end{vmatrix}$$

$$= c \times (-1)^{4+2} \times \begin{vmatrix} -c+3 & 4c+6 & -c-2 \\ 2c-4 & 3c+5 & -c-1 \\ -c-2 & 4c+8 & -c-2 \end{vmatrix}$$

$$\det C = c \times \begin{vmatrix} c_2 + 4c_1 & c_3 - c_1 \\ -c+3 & 18 & -5 \\ 2c-4 & 11c-11 & -3c+3 \\ -c-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= c \times (-c-2) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 18 & -5 \\ 11c-11 & -3c+3 \end{vmatrix}$$

$$= -c(c+2) (18 \times (-3c+3) - (11c-11)(-5))$$

$$= -c(c+2) (-54c + 54 + 55c - 55)$$

$$= -c(c+2)(c-1)$$

donc $\det C \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0, -2 \text{ ou } 1$.

Ainsi C est inversiblessi $c \neq 0, -2 \text{ ou } 1$.

Exercice 4:

1) On a:

$$\text{adj } B = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} (2 \times 1 - 2 \times 4) & -(1 \times 1 - (-1) \times 4) & (1 \times 2 - (-1) \times 2) \\ -((-3) \times 1 - 2 \times (-2)) & (2 \times 1 - (-1) \times (-2)) & -(2 \times 2 - (-1) \times (-3)) \\ ((-3) \times 4 - 2 \times (-2)) & -(2 \times 4 - 1 \times (-2)) & (2 \times 2 - 1 \times (-3)) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & -10 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2) On sait que $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \times \text{adj } B$.

$$\text{Or, } \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} L_1 + 2L_3 \\ L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - (1 \times 5 - 4 \times 0) = -5.$$

$$\text{d'où } B^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vérif:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

Exercice 5:

$$\text{On a: } (S) \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d'où } x = \frac{\det A_1}{\det A} \text{ avec } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } \det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1-2C_3 & C_2-C_3 & C_3-C_3 \\ 5 & 3 & -1 \\ -11 & -3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times (-3) - 3 \times (-11) \\ = -15 + 33 = 18$$

$$\text{et } \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_2-C_1 & C_3-C_1 & C_3-C_1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 7 - 4 \times (-4)$$

$$= 9$$

$$\text{Ainsi } x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{18}{9} = 2$$

Exercise 6:

$$1) \text{ On a : } P_C(\lambda) = \det (C - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda) - (-2) \times 1$$

$$= 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$2) \text{ On a : } P_C(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3 \text{ ou } 2$$

$$\text{donc } P_C(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

(7)

Ca donne 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 1.
 $\lambda_2 = 3$ de multiplicité 1.

3). Pour $\lambda_1 = 2$: $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 2x \\ -2x + y = 2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x = -y$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

On pose alors $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et e_1 est une base de E_1 car λ_1 de multiplicité 1.

• Pour $\lambda_2 = 3$: $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 3x \\ -2x + y = 3y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = -y$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

On pose alors $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et e_2 est une base de E_2 car λ_2 est de multiplicité 1.

4) C est diagonalisable car C possède 2 valeurs propres simples distinctes.