

EXAMEN

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.***Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, 2x + y - 2z, 5x - z).$$

- 1/4
- /0.5 a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
 /1.5 b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et sa dimension.
 /1.5 c) En déduire le rang de f , puis une base de $\text{Im } f$ en précisant sa dimension.
 /0.5 d) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

13.5 **Exercice 2** - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- /3 1. Démontrer que cette matrice A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
- /0.5 2. En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} -x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y - z = 4 \\ -x + 2y - z = -6 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

2.5
$$\begin{bmatrix} -c+3 & 2c+3 & -2c-3 & c+1 \\ 2c-4 & 2c+2 & -3c-1 & c+1 \\ -c-2 & c+1 & c+5 & -1 \\ 0 & c & -3c & c \end{bmatrix}.$$

1/4 **Exercice 4** - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- /2.5 1. Calculer la matrice adjointe de B .
 /1.5 2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de x dans la solution du

2.5 système linéaire
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -2x + 2y + 5z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

13.5 **Exercice 6** - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

- /1.5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de C .
 /0.5 2. Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
 /1 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
 /0.5 4. La matrice C est-elle diagonalisable ?