Corrigé du partiel de TQ2

exercice 1 :

1) On a : $f(x) = (x-4)^2 \times (3x-3)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } f'(x) &= \left((x-4)^2\right)' \times (3x-3) + (x-4)^2 \times (3x-3)' \\ &= 2(x-4)(3x-3) + (x-4)^2 \times 3 \\ &= 3(x-4)\left(2\times(x-1) + (x-4)\right) \\ &= 3(x-4)(3x-6) \\ &= 9(x-4)(x-2) \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=2$.

Les points critiques sont donc : 2 et 4.

Calculons maintenant $f''(x)$. On a : $f'(x) = 9(x^2 - 4x - 2x + 8)$
$= 9(x^2 - 6x + 8)$

d'où $f''(x) = 9(2x-6) = 18(x-3)$.

Ainsi $f''(2) = 18(2-3) = -18 < 0$ donc 2 est un maximum

$f''(4) = 18 \times (4-3) = 18 > 0$ donc 4 est un minimum.

On a alors :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$+$ ↗	0	↘ $-$		↗	0	↗ $+$	
f	$-\infty$	↗	12	↘		↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $f(2) = (2-4)^2 \times (3\times2-3) = 4\times3 = 12$

$f(4) = 0$

Ainsi, 2 est un maximum local strict.
4 est un minimum local strict.

2) (a) On a : $g(x) = u \circ v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \; ; & u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v(x) = e^x - 1 \; ; & v'(x) = e^x \end{cases}$

d'où $g'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = e^x \times \dfrac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

Comme $g'(x) = \dfrac{U(x)}{2V(x)}$ avec $\begin{cases} U(x) = e^x & ; \; U'(x) = e^x \\ V(x) = \sqrt{e^x - 1} = g(x) \; ; & V'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \end{cases}$

on a : $$g''(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{2V(x)^2}$$

$$= \frac{e^x \times \sqrt{e^x - 1} - e^x \times e^x / 2\sqrt{e^x - 1}}{2\left(\sqrt{e^x - 1}\right)^2}$$

$$= \frac{2e^x\left(\sqrt{e^x - 1}\right)^2 - \left(e^x\right)^2}{4\sqrt{e^x - 1}\,(e^x - 1)}$$

$$= \frac{2e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{4\sqrt{e^x - 1}\,(e^x - 1)}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x}{4\sqrt{e^x - 1}\,(e^x - 1)}$$

$$= \frac{e^x(e^x - 2)}{4\sqrt{e^x - 1}\,(e^x - 1)}$$

(b) On a :

$g''(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0$

$\iff e^x = 2$

$\iff x = \ln 2$

(b) Ainsi, $g''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 2$ car $e^x > 0$ et $e^x - 1 > 0$

$g''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \ln 2$ car $e^x > 0$ et $e^x - 1 > 0$

Donc g est convexe sur $[\ln 2 ; +\infty[$

et g est concave sur $]0 ; \ln 2[$.

3) (a) $D_h = \mathbb{R}^3$

On a : $\operatorname{grad} h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + ze^x \\ x^2 \\ e^x \end{pmatrix}$

(b) $D_j = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_2 + x_3 > 0,\ x_4 > 0 \text{ et } x_5 \neq 0 \right\}$.

On a : $\operatorname{grad} j = \begin{pmatrix} \frac{\partial j}{\partial x_1} \\ \frac{\partial j}{\partial x_2} \\ \frac{\partial j}{\partial x_3} \\ \frac{\partial j}{\partial x_4} \\ \frac{\partial j}{\partial x_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x_2+x_3)/x_5 \\ x_1/(x_5 \times (x_2+x_3)) \\ x_1/(x_5 \times (x_2+x_5)) - \sqrt{x_4}\, x_5 e^{x_3 x_5} \\ -e^{x_3 x_5}/(2\sqrt{x_4}) \\ -x_1 \ln(x_2+x_3)/x_5^2 - \sqrt{x_4}\, x_3 e^{x_3 x_5} \end{pmatrix}$

exercice 2 :

1) On a : $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\, e^{x^2+3y^2} \\ 6y\, e^{x^2+3y^2} \end{pmatrix}$ car $(e^u)' = u' e^u$.

2) On a : $\operatorname{grad} f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$.

L'unique point critique est donc $(0,0)$.

3) On a: $f(0,0) = e^0 = 1$.

et $x^2 + 3y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc $e^{x^2+3y^2} \geq 1$ car l'exponentielle est une fonction croissante.

d'où $f(x,y) \geq f(0,0) \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc $(0,0)$ est un minimum global.

Ce minimum est strict car $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2+3y^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 3y^2 = 0$ car l'exponentielle est injective.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Finalement, $(0,0)$ est un minimum global strict.

<u>exercice 3:</u>

1) On a: $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2 - y^2 + 2)\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 2)}{x^2 - y^2 + 2} \quad \text{car } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{2x}{x^2 - y^2 + 2}$$

et $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2 - y^2 + 2)\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + 2)}{x^2 - y^2 + 2} \quad \text{car } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{-2y}{x^2 - y^2 + 2}$$

2) On a: $$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 - y^2 + 2} \\ \frac{-2y}{x^2 - y^2 + 2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Il y a un unique point critique : $(0,0)$.

3) On a : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2-y^2+2}\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2-y^2+2)^2} \times \left(\frac{\partial (2x)}{\partial x} \times (x^2-y^2+2) - 2x \times \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2+2\right)\right)$$
$$= \frac{2(x^2-y^2+2) - 2x(2x)}{(x^2-y^2+2)^2}$$
$$= \frac{2(-x^2-y^2+2)}{(x^2-y^2+2)^2}$$

puis $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2y}{x^2-y^2+2}\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2-y^2+2)^2} \times \left(\frac{\partial}{\partial y}(-2y) \times (x^2-y^2+2) - (-2y) \times \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2+2\right)\right)$$
$$= \frac{-2(x^2-y^2+2) - (-2y)(-2y)}{(x^2-y^2+2)^2}$$
$$= \frac{-2(x^2+y^2+2)}{(x^2-y^2+2)^2}$$

et enfin $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ par le thm de Schwarz
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2-y^2+2}\right)$$

$$= -\frac{2x}{(x^2-y^2+2)^2} \times \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2+2)$$

$$= \frac{-2x \times (-2y)}{(x^2-y^2+2)^2}$$

$$= \frac{4xy}{(x^2-y^2+2)^2}$$

4)(a) sur $[-1;1]$, $x^2 \geq 0$

donc $x^2+2 \geq 2$

donc $\ln(x^2+2) \geq \ln 2$

d'où $g(x) \geq \ln 2 = g(0)$

Donc g admet un minimum local en $x=0$.

(b) On a: $h(y) = f(0,y) = \ln(-y^2+2)$

sur $[-1;1]$, $-y^2 \leq 0$

donc $-y^2+2 \leq 2$

donc $\ln(-y^2+2) \leq \ln 2$

d'où $h(y) \leq \ln 2 = h(0)$

Donc h admet un maximum local en $y=0$.

(c) D'après 4)(a) et 4)(b), on arrive à une contradiction.

Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local.