

PARTIEL DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Barème indicatif :

Exercice 1 : 8 points

Exercice 2 : 4 points

Exercice 3 : 8 points

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

- /2.5 1. Trouver les extrema éventuels de la fonction $f(x) = (x-4)^2(3x-3)$ et en déterminer la nature.
2. Considérons la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{e^x - 1}$.
- /1.5 (a) Montrer que $g''(x) = \frac{e^x(e^x-2)}{4\sqrt{e^x-1}(e^x-1)}$.
- /1 (b) En déduire la convexité de la fonction g .
3. Calculer le gradient des fonctions suivantes, en précisant leurs ensembles de définition :
- /1 (a) $h(x, y, z) = x^2y + ze^x$
- /2 (b) $j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1 \ln(x_2 + x_3)}{x_5} - \sqrt{x_4}e^{x_3x_5}$

Exercice 2 - On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f(x, y) = e^{x^2+3y^2}$.

- /2 1. Calculer le gradient de f .
- /0.5 2. En déduire que l'unique point critique de f est $(0, 0)$.
- /1.5 3. Montrer que f admet en $(0, 0)$ un extremum dont on précisera la nature.

Exercice 3 - Dans ce problème on considère la fonction f définie sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ par

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 + 2).$$

- /1.5 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de f (c'est-à-dire le(s) point(s) où le gradient s'annule).
- /0.5 3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
- /3.5 4. (a) Démontrer que la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = f(x, 0) = \ln(x^2 + 2)$ admet en $x = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
- /1 (b) Notons h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h(y) = f(0, y)$. Démontrer qu'elle admet en $y = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
- /1 (c) Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local pour la fonction f ?
- /0.5