Examen TQ2 – éléments de correction

Exercice 1 (4 points)

Le tableau ci-dessous croise les modalités sexe (X) et les périodes de chômage cumulées (Y) sur une population de 149 personnes, âgées de moins de 30 ans.

Période de chômage (Y) / Sexe (X)	Moins de 3 mois	Entre 3 et 6 mois	Plus de 6 mois	total
Homme	15	23	10	48
Femme	21	42	38	101
total	36	65	48	149

1) $n_{2\,1}=21$ $n_{+1}=36$ et $n_{2\,+}=101$.

2) a) $f_{2\,1}=\frac{21}{149}\approx 0{,}14$ et $f_{+\,1}=\frac{36}{149}\approx 0{,}24$.

b) $f_{+\,1}$:24 % des personnes interrogées ont cumulé moins de 3 mois de chômage.

3) a) $f_{X=x_2\,/\,Y=y_1}=\frac{21}{36}\approx 0{,}58$.

b) $f_{X=x_2\,/\,Y=y_1}$: 58% des personnes interrogées ayant connu une période cumulée de chômage de moins de 3 mois, sont des femmes
ou : parmi les personnes interrogées ayant connu une période cumulée de chômage de moins de 3 mois, 58% sont des femmes.

4) Tester l'indépendance entre X et Y en réalisant un test du khî2 au seuil de 5%.

H_0 : il y a indépendance entre sexe et durée du chômage chez les moins de 30 ans

H_1 : il n'y a pas indépendance (existence d'une liaison) entre sexe et durée du chômage chez les moins de 30 ans

seuil α = 5%

ddl = (2-1)x(3-1)= 2

Valeurs observées

période de chomage (Y) / Sexe(X)	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	Total
Homme	**15**	**23**	10	48
Femme	**21**	**42**	38	101
Total	36	65	48	149

Valeurs calculées

période de chomage (Y) / Sexe(X)	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	Total
Homme	**11,60**	**20,94**	**15,46**	48
Femme	**24,40**	**44,06**	**32,54**	101
Total	36	65	48	149

Contribution au khi2

période de chomage (Y) / Sexe(X)	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	Total
Homme	**1,00**	**0,20**	**1,93**	3,13
Femme	**0,47**	**0,10**	**0,92**	1,49
Total	1,47	0,30	2,85	4,6

$\chi^2_{calc}=4{,}6$

$\chi^2_{(0{,}05\,;\,2)}=5{,}99$

$\chi^2_{calc}<\chi^2_{(0{,}05\,;\,2)}$: on ne rejette pas l'hypothèse d'indépendance et on ne soupçonne pas l'existence d'une liaison entre sexe et durée du chômage.

Exercice 2 (4 points)

On relève le cours de 2 actions du secteur bancaire : Credit Agricole (X) et Société Générale (Y) sur 10 jours ouvrés entre le 01/03/17 et le 14/03/17 inclus

1) On donne dans le tableau

jour	Credit Agricole (x_i)	Société Générale (y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
1	11,81	43,97	139,476	1 933,361	519,286
2	11,86	44,12	140,660	1 946,574	523,263
3	12,2	45,21	148,840	2 043,944	551,562
4	12,1	45,15	146,410	2 038,523	546,315
5	12,07	45,81	145,685	2 098,556	552,927
6	12,07	45,76	145,685	2 093,978	552,323
7	12,4	47,75	153,760	2 280,063	592,100
8	12,65	47,65	160,023	2 270,523	602,773
9	12,52	46,95	156,750	2 204,303	587,814
10	12,34	46,96	152,276	2 205,242	579,486
somme	**122,02**	**459,33**	**1 489,56**	**21 115,06**	**5 607,85**

A l'aide des sommes affichées dans le tableau :

a) $\bar{x}=\dfrac{122,02}{10}=12,20$ et $\bar{y}=\dfrac{459,33}{10}=45,93$

b) $V(x)=\dfrac{1489,56}{10}-12,20^2\approx 0,12$

$V(y)=\dfrac{21115,06}{10}-45,93^2\approx 1,94$

$cov(x,y)=\dfrac{5607,85}{10}-12,20\times 45,93\approx 0,44$

Remarque : si les valeurs des moyennes réutilisées pour les calculs sont à 0,001 près on trouve :

$V(x)=\dfrac{1489,56}{10}-12,202^2\approx 0,07$

$V(y)=\dfrac{21115,06}{10}-45,933^2\approx 1,67$

$cov(x,y)=\dfrac{5607,85}{10}-12,202\times 45,933\approx 0,31$

2) a) $r\approx\dfrac{0,44}{\sqrt{0,12\times 1,94}}\approx 0,91$ (ou ,sous la remarque précédente, : $r\approx\dfrac{0,31}{\sqrt{0,07\times 1,67}}\approx 0,91$)

r est proche de 1, un ajustement linéaire est envisageable

b) par la MCO $a\approx\dfrac{0,44}{0,12}\approx 3,67$ et $b\approx 45,93-3,67\times 12,20\approx 1,16$

$y=3,67\,x+1,16$

(ou sous la remarque précédente $a\approx\dfrac{0,31}{0,07}\approx 4,43$ et $b\approx 45,933-4,43\times 12,202\approx -8,12$)

$y=4,43\,x-8,12$

c) $3,67\times 14+1,16\approx 52,54$ ou ($4,43\times 14-8,12\approx 53,9$)

exercice 3 :

1) a) on a:

$h(x) = \sin(3x)$	$h(0) = 0$
$h'(x) = 3\cos(3x)$	$h'(0) = 3$
$h''(x) = -9\sin(3x)$	$h''(0) = 0$
$h^{(3)}(x) = -27\cos(3x)$	$h^{(3)}(0) = -27$

d'où $h(x) = h(0) + x\, h'(0) + \frac{x^2}{2!} h''(0) + \frac{x^3}{3!} h^{(3)}(0) + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= 0 + x \times 3 + \frac{x^2}{2} \times 0 + \frac{x^3}{6} \times (-27) + x^3 \varepsilon(x)$$

$$= 3x - \frac{9x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

b) on en déduit quand $x \to 0$:

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{3x - \frac{9x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{x}$$

$$= 3 - \frac{9}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 3$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$

2) on a: $(\sqrt{x} + 10x + \ln x) \sim 10x$ car $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée} \end{cases}$

et $x^3 + 4x^2 \sim x^3$ car $\frac{4x^2}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

d'où $\frac{\sqrt{x} + 10x + \ln x}{x^3 + 4x^2} \sim \frac{10x}{x^3}$

$$\sim \frac{10}{x^2}$$

3) $$\int_0^{\pi/2} (t+3)\cos t \, dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\,dt$$

$u(t) = t+3$	$u'(t) = 1$
$v'(t) = \cos t$	$v(t) = \sin t$

$$= \left[(t+3)\sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times \sin t \, dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 3\right) - \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 3 - 1 = \frac{\pi}{2} + 2$$

4) a) on a : $G'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2e^x\right)' = \frac{1}{2}\left[2x\,e^x + x^2e^x\right]$

$$= x\,e^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

donc G est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de $xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$.

b) on a alors : $\int_0^2 \left(xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2e^x\right]_0^2 = \frac{4}{2}e^2$

$$= 2e^2$$

5) par changement de variable, on a :

$$\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} u(t) = 1-t^2 & a=0 \\ u'(t) = -2t & b=1 \\ f(u) = 1/\sqrt{u} & u(a)=1 \\ & u(b)=0 \end{array}}$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}\,dt$$

$$= -\frac{3}{2}\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt$$

$$= -\frac{3}{2}\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

$$= -\frac{3}{2}\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^0$$

$$= \frac{3}{2}\times 2\sqrt{1} = 3.$$

6) on a : $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2+2} \leq \frac{1}{t^2+2}$ car $\sin^2(t) \leq 1$.

$\leq \frac{1}{t^2}$ car $t^2+2 \geq t^2$

et si $n > 1$, on a : $0 \leq \int_1^n \frac{\sin^2 t}{t^2+2}\,dt \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2}$

$$\leq \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n$$

$$\leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\leq 1.$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2+2}\,dt$ est convergente.

exercice 4 :

1) on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^3 - 3y - 6e^x + 6x + 2\right)$

$= -6e^x + 6$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^3 - 3y - 6e^x + 6x + 2\right)$

$= 3y^2 - 3$

d'où $\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^x + 6 \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-6e^x + 6\right) = -6e^x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 - 3\right) = 6y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-6e^x + 6\right) = 0.$

par le thm de Schwartz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

3) a) on a : $\text{grad } f(0;1) = \begin{pmatrix} -6 \times 1 + 6 \\ 3 \times 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $(0, 1)$ est un point critique de f.

b) $\text{grad } f = 0 \iff \begin{cases} -6e^x + 6 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

donc f admet un second point critique : $(0; -1)$.

4) a) on a : $f_1'(x) = 6 - 6e^x$ et $f_1'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$

$f_1''(x) = -6e^x$ et $f_1''(0) = -6 < 0$

donc 0 est un maximum de f_1.

b) $f_2(y) = f(0,y) = y^3 - 3y + 2$

d'où $f_2'(y) = 3y^2 - 3$ et $f_2'(0) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

et $f_2''(y) = 6y$ d'où $f_2''(1) = 6 > 0$

donc 1 est un minimum de f_2.

c) Comme $(0,1)$ ne peut pas à la fois être un maximum (4) a)) et un minimum (4) b)), f ne possède pas d'extremum en $(0;1)$.