Examen TQ2 - Durée 2h

- Documents interdits, calculatrice autorisée
- Sauf mentions contraires, les valeurs approchés seront **arrondies à 0,01** et réutilisées dans les calculs.
- Le barème est donné à titre indicatif, sujet recto-verso

Exercice 1 (4 points)

Le tableau ci-dessous croise les modalités sexe (X) et les périodes de chômage cumulées (Y) sur une population de 149 personnes, âgées de moins de 30 ans.

Sexe (X)	Période de chômage	Moins de 3 mois	Entre 3 et 6 mois	Plus de 6 mois	total
Homme		15	23	10	48
Femme		21	42	38	101
total		36	65	48	149

- 1) Donner ou calculer n_{21} , n_{+1} et n_{2+} .
- 2) a) Donner ou calculer f_{21} et f_{+1} .
b) Interpréter la valeur de f_{+1} .
- 3) a) Calculer $f_{X=x_2/Y=y_1}$.
b) Interpréter la valeur de $f_{X=x_2/Y=y_1}$.
- 4) Tester l'indépendance entre X et Y en réalisant un test du χ^2 au seuil de 5%. (Compléter les 2 tableaux en annexe).
Conclure quant à la dépendance entre X et Y. (Attention à rendre l'annexe avec la copie)

Exercice 2 (4 points)

On relève le cours de 2 actions du secteur bancaire : Credit Agricole (X) et Société Générale (Y) sur 10 jours ouvrés entre le 01/03/17 et le 14/03/17 inclus

1) On donne dans le tableau

jour	Credit Agricole (x)	Société Générale (y)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	11,81	43,97	139,476	1 933,361	519,286
2	11,86	44,12	140,660	1 946,574	523,263
3	12,2	45,21	148,840	2 043,944	551,562
4	12,1	45,15	146,410	2 038,523	546,315
5	12,07	45,81	145,685	2 098,556	552,927
6	12,07	45,76	145,685	2 093,978	552,323
7	12,4	47,75	153,760	2 280,063	592,100
8	12,65	47,65	160,023	2 270,523	602,773
9	12,52	46,95	156,750	2 204,303	587,814
10	12,34	46,96	152,276	2 205,242	579,486
somme	122,02	459,33	1 489,56	21 115,06	5 607,85

A l'aide des sommes affichées dans le tableau :

- 1) a) Déterminer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de X et Y (donner le calcul).
b) Déterminer la variance de X, la variance de Y et la covariance de X et Y (donner les calculs).
- 2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. Interpréter le résultat obtenu.
b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$ par la méthode des moindres carrés (MCO).
c) Donner une estimation de la valeur de l'action Société Générale si l'action Crédit Agricole cõtait au même moment 14 euros.

Exercice 3 (7 pts)

questions diverses et indépendantes (ne pas hésiter à passer des questions)

1) /1 a) Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(3x)$$

/0,5 b) En déduire la limite en 0 de $\frac{\sin(3x)}{x}$./1 2) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\frac{\sqrt{x} + 10x + \ln(x)}{x^3 + 4x^2}$./1 3) /0,5 A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+3)\cos(t) dt$.4) /0,5 a) Vérifier que la fonction G définie par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$./1 b) En déduire $\int_0^2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x dx$.5) /1 Calculer $\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1-t^2}} dt$.6) /1 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2+2} dt$ est convergente (sans en calculer la valeur).

(7)

Exercice 4 (5 pts + 1)On considère la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = y^3 - 3y - 6e^x + 6x + 2$ /1 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f ./2 2) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.3) a) Justifier que (0;1) est un point critique de f .

/0,5

b) Bonus : déterminer les autres points critiques de f .

/1

4) a) On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = f(x; 1) = 6x - 6e^x$./1 Montrer que f_1 admet un extremum en $x=0$ et déterminer sa nature./1 b) De même montrer que f_2 définie par $f_2(y) = f(0, y)$ admet un extremum en $y=1$ et déterminer sa nature./0,5 c) En déduire la nature du point critique (0,1) pour f .

NOM :
 PRENOM :
 N° etudiant

ANNEXE

Valeurs observées

Sexe(X)	période de chômage (Y)			Total
	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	
Homme	15	23	10	48
Femme	21	42	38	101
Total	36	65	48	149

Valeurs calculées

Sexe(X)	période de chômage (Y)			Total
	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	
Homme			15,46	48
Femme			32,54	101
Total	36	65	48	149

Contribution au khi2

Sexe(X)	période de chômage (Y)			Total
	moins de 6 mois	Entre 3 et 6 mois	plus de 6 mois	
Homme			1,93	
Femme			0,92	
Total			2,85	4,6

Table du khi2

ddl \ t	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	10,83	7,88	6,64	5,02	3,84	2,71	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	13,82	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00
3	16,27	12,84	11,35	9,35	7,82	6,25	0,58	0,35	0,22	0,12	0,07	0,02
4	18,47	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,71	0,48	0,30	0,21	0,09
5	20,52	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	0,83	0,55	0,41	0,21
6	22,46	18,55	16,81	14,45	12,59	10,85	2,20	1,64	1,24	0,87	0,68	0,38
7	24,32	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	2,83	2,17	1,69	1,24	0,99	0,60
8	26,12	21,96	20,09	17,54	15,51	13,36	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34	0,86
9	27,88	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	4,17	3,33	2,70	2,09	1,74	1,15
10	29,59	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16	1,46
11	31,26	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	5,58	4,58	3,82	3,05	2,60	1,83
12	32,91	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07	2,21
13	34,53	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57	2,62
14	36,12	31,32	29,14	26,12	23,69	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66	4,08	3,04
15	37,70	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60	3,48
16	39,25	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14	3,94
17	40,79	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70	4,42
18	42,31	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	10,87	9,39	8,23	7,02	6,27	4,91
19	43,82	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84	5,41
20	45,31	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43	5,92
21	46,80	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03	6,45
22	48,27	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64	6,98
23	49,73	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26	7,53
24	51,18	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89	8,09
25	52,62	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52	8,65
26	54,05	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16	9,22
27	55,48	49,65	46,96	43,20	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81	9,80
28	56,89	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,57	12,46	10,39
29	58,30	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12	10,99
30	59,70	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79	11,59
31	61,10	55,00	52,19	48,23	44,99	41,42	21,43	19,28	17,54	15,66	14,46	12,20
32	62,49	56,33	53,49	49,48	46,19	42,59	22,27	20,07	18,29	16,36	15,13	12,81
33	63,87	57,65	54,78	50,73	47,40	43,75	23,11	20,87	19,05	17,07	15,82	13,43
34	65,25	58,96	56,06	51,97	48,60	44,90	23,95	21,66	19,81	17,79	16,50	14,06
35	66,62	60,28	57,34	53,20	49,80	46,06	24,80	22,47	20,57	18,51	17,19	14,69