EXAMEN FINAL - DEUXIÈME SESSION - **CORRIGÉ**

Mardi 13 juin 2017

Durée: 2 heures

Exercice 1 - On représente les revenus annuels (en milliers d'euros) au sein d'une entreprise **(10 points)**

Revenus annuels (en milliers d'euros)	Nombre de salariés
$[0, 10[$	10
$[10, 20[$	30
$[20, 30[$	90
$[30; 40[$	50
$[40, 50[$	40

1. Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes **(1,5 points)**

	n_i	f_i	f_{cc}	f_{cd}
$[0, 10[$	10	0.05	0.05	1
$[10, 20[$	30	0.14	0.18	0.95
$[20, 30[$	90	0.41	0.59	0.82
$[30, 40[$	50	0.23	0.82	0.41
$[40, 50[$	40	0.18	1.00	0.18
	220	1		

2. En déduire le pourcentage de salariés de l'entreprise en question dont le revenu annuel est supérieur à 30 000 euros; puis inférieur à 40 000 euros **(0,5 point)**

   On en déduit que la part des salariés dont le revenu annuel est supérieur à 30 000 euros est égale à 41 % et dont le revenu annuel est inférieur à 40 000 euros est égale à 82 %.

3. Calculer le revenu annuel moyen **(2 points)**

	a_i	b_i	n_i	c_i	$c_i * n_i$
$[0, 10[$	0	10	10	5	50
$[10, 20[$	10	20	30	15	450
$[20, 30[$	20	30	90	25	2250
$[30, 40[$	30	40	50	35	1750
$[40, 50[$	40	50	40	45	1800
			220		**6300**

Le revenu annuel moyen est donc égal à $\frac{6300}{220} = 28,64$, soit 28 640 euros.

4. Calculer Q_1 et Q_2 de la série **(1,5 points)**

Q_1 se trouve dans la classe $[10, 20[$ d'amplitude 10 avec une fréquence égale à 0,14 et une fréquence cumulée croissante de la classe précédence égale à 0,05. On trouve donc que

$$Q_1 = 10 + 10 \times \frac{0.25 - 0.05}{0.14} = 25$$

De même, Q_2 se trouve également dans la classe $[10, 20[$ d'amplitude 10 avec une fréquence égale à 0,14 et une fréquence cumulée croissante de la classe précédence égale à 0,05. On trouve donc que

$$Q_2 = 10 + 10 \times \frac{0.5 - 0.05}{0.14} = 43.3$$

5. On donne $Q_3 = 37$. Représenter la boite à moustaches **(2 points)**

On calcule l'écart interquartile $EIQ = Q_3 - Q_1 = 37 - 25 = 12$. Ainsi, on obtient la valeur minimale $(= Q_1 - 1.5 \times EIQ = 25 - 1.5 \times 12 = 7)$ et la valeur maximale $(= Q_3 + 1.5 \times EIQ = 37 + 1.5 \times 12 = 55)$

6. Calculer la variance puis l'écart-type **(2,5 points)**

	a_i	b_i	n_i	c_i	c_i^2	$n_i * c_i^2$
$[0, 10[$	0	10	10	5	25	250
$[10, 20[$	10	20	30	15	225	6750
$[20, 30[$	20	30	90	25	625	56250
$[30, 40[$	30	40	50	35	1225	61250
$[40, 50[$	40	50	40	45	2025	81000
			220			**205500**

On trouve que la variance de la série est égale à

$$V(x) = \frac{205500}{220} - 28.64^2 = 114$$

On en déduit que l'écart-type est donc égal à:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{114} = 10.68$$

Exercice 2 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes **(10 points)**

1. Posons $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } |x - 2| < 4\}$. Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de E dans $\mathbb{R}$ **(2 points)**

$$\begin{aligned} |x-2| < 4 &\Leftrightarrow -4 < x - 2 < 4 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 6 \\ &\Leftrightarrow x \in]-2, 6[\end{aligned}$$

On en déduit que $E =]-2, 6[$. $\min(E)$ et $\max(E)$ n'existent pas car l'intervalle est ouvert. On trouve que $\inf(E) = -2$ et $\sup(E) = 6$.

2. Soit les deux suites suivantes **(2 points)**

   (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Donner u_n en fonction de n et calculer u_5.

   $$u_n = u_0 + rn \Leftrightarrow u_n = 2 + 3n$$

   On en déduit u_5

   $$u_5 = 2 + 3 \times 5 = 17$$

   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géometrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = 2$. Donner v_n en fonction de n et calculer v_7. On trouve que

   $$v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = 1 \times 2^n$$

   On en déduit v_7

   $$v_7 = 1 \times 2^7 = 128$$

3. Déterminer les limites de $g(x) = \frac{5x^2-4x-1}{x^2-3x+2}$ quand x tend vers $-\infty, 1, 2$ et $+\infty$ **(1 point)**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 5 = 5$
De même, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$

4. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = e^x(x - 1)$$

(a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ **(1 point)**
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

(b) Calculer la dérivée f' de la fonction f. En déduire le tableau de variations **(2,5 points)**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x-1) + e^x \\
&= e^x(x-1+1) \\
&= e^x x
\end{aligned}
$$

On en déduit que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
On dresse ensuite le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Donner suivant la valeur de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$ **(1,5 points)**
Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue. Par ailleurs, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ à valeurs dans $[-1, 0]$. Puis, la fonction est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que :

- Si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions;
- si $m = 0$ alors cette équation admet une solution tout comme pour le cas où $m > 0$.