

Corrigé de l'examen

Exercice 1:

- 1) a) Population = habitants de la commune Alpha
- b) Le caractère étudié est le revenu annuel par habitant.
- c) C'est un caractère quantitatif discret.
- d) Il y a 6 modalités: $[5; 6[$, $[6; 10[$, $[10; 20[$, $[20; 35[$, $[35; 85[$ et $[85; 200[$.

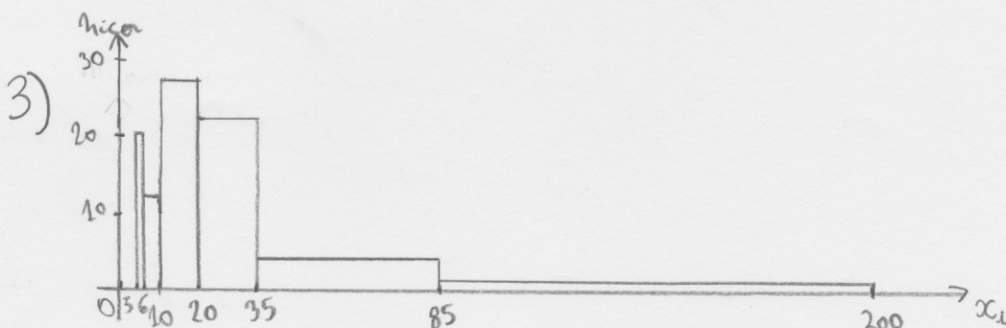
2) a)

	n_i	f_i	f_{icc}	A_i	n_{icor}	x_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
$[5; 6[$	20	0,02	0,02	1	20	5,5	110	30,25	605
$[6; 10[$	50	0,05	0,07	4	12,5	8	400	64	3200
$[10; 20[$	280	0,28	0,35	10	28	15	4200	225	63000
$[20; 35[$	350	0,35	0,7	15	23,33	27,5	9625	756,25	264688
$[35; 85[$	200	0,2	0,9	50	4	60	12000	3600	720000
$[85; 200[$	100	0,1	1	115	0,87	142,5	14250	20306,25	2030625
Total	1000	1	/	/	/	/	40585	/	3082118

On a: $f_i = \frac{n_i}{n}$ où $n = \sum n_i$

et $f_{icc} = \sum_{j \leq i} f_j$

- b) Le pourcentage des individus gagnant moins de 20 000 €/an est alors de 35%.



on rappelle que $m_{i \text{ cor}} = m_i \times \frac{A_i}{A_{\min}}$ avec $A_i = b_i - a_i$ et $A_{\min} = \min(A_i)$.

4) a) La classe modale est $[10; 20[$ car c'est celle où le $m_{i \text{ cor}}$ est maximal.

b) On a: $M_0 = \frac{(h-h_2) \times x_1 + (h-h_1) \times x_2}{(h-h_1) + (h-h_2)}$ avec $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 20 \\ h = 28 \\ h_1 = 17,5 \\ h_2 = 23,33 \end{cases}$

$$= \frac{(28-23,33) \times 10 + (28-17,5) \times 20}{(28-17,5) + (28-23,33)}$$

$$\approx 17,68 \text{ k€}$$

5) a) On sait que $M_e \in [20; 35[$ car $0,35 < 0,5 < 0,7$

On a alors $M_e = \left(\frac{0,5 - 0,35}{0,7 - 0,35} \right) (35 - 20) + 20 \approx 26,43 \text{ k€}$

La moitié de la population gagne moins de 26,43 k€/an.

b) On sait que $Q_3 \in [35; 85[$ car $0,7 < 0,75 < 0,9$

On a alors $Q_3 = \frac{(0,75 - 0,7)}{(0,9 - 0,7)} \times (85 - 35) + 35 \approx 47,5 \text{ k€}$

75% de la population gagne moins de 47,5 k€/an.

6) a) On a: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum m_i x_i = \frac{40585}{1000} = 40,59 \text{ k€}$.

Le salaire moyen est de 40,59 k€/an.

b) On a: $V(x) = \frac{1}{n} \sum m_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{3082118}{1000} - 40,59^2 = 1434,57$.

c) On a: $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 37,88 \text{ k€}$ l'écart moyen à la moyenne est de 37,88 k€/an.

Exercice 2:

(3)

1) a) $E = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 7\}$.

b) majorants $= [7, +\infty[$ car si $x \in E$, $x \leq 7$.

minorants $=]-\infty, 0]$ car si $x \in E$, $x \geq 0$.

c) $\max(E)$ n'existe pas car $7 \notin E$.

$\min(E) = 0$ car $0 \in E$

$\sup(E) = 7$

$\inf(E) = \min(E) = 0$.

2) a) Si (u_n) est géométrique, on sait que $u_{n+1} = q u_n$.

donc $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) On sait aussi que $u_n = q^n \times u_0$ donc $u_1 = q u_0$ d'où $u_0 = \frac{u_1}{q}$
 $= \frac{1/3}{1/2}$
 $= \frac{2}{3}$.

c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ car $|q| < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3) a) On a $\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x - 1}{x+1}$ car $f(-1) = 1$

$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} - 1$

$= -\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}} - 1$ pour $x < -1$ car $x+1 < 0$

(4)

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}} - 1, \quad x < -1$$

$$= -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1.$$

b) Ainsi $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\sqrt{\frac{-2}{0^-}} - 1 = -\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en -1 .

c) Orma: $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x + 1}{x-1}$ car $f(1) = -1$.

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} - 1 \quad \text{pour } x > 1$$

$$= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1.$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{2}{0^+}} - 1 = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en 1 .

Exercice 3:

1) a) Orma: $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g'	$+$	0	0	$+$
g	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$g(1) = -6$

$g(-1) = -2$

b) pour $x \leq 1$, $g(x) < 0$ d'après a).

Sur $[1; +\infty[$, g est continue, strictement $\nearrow$ et $g(1) = -6 < 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

donc par le corollaire du TVI, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$

tq $g(\alpha) = 0$ et $\alpha > 1$.

Dans ce cas, α est bien ≥ 0 .

c) Ainsi, si $x \leq \alpha$, $g(x) \leq 0$

si $x \geq \alpha$, $g(x) \geq 0$

2) a) On a: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 + 2x^2 \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

Comme $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 + 4x \\ v'(x) = 2x \end{cases}$, on a:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u'v - uv'}{v^2} \right)(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

sur $]1; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe car $\frac{x}{(x^2-1)^2} \geq 0$.

b) Quand $x \rightarrow +\infty$, on a:
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^3(1 + 2/x)}{x^2(1 - 1/x^2)} = x \frac{(1 + 2/x)}{(1 - 1/x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

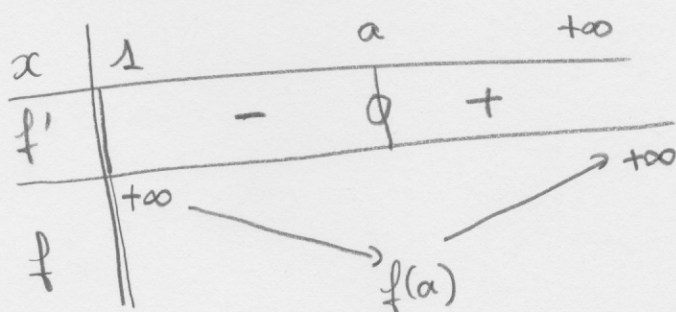
Quand $x \rightarrow 1^+$, on a:
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)} \times \frac{1}{(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{2} \times \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Ainsi f admet une asymptote verticale en $x=1$.

c) Par 1) b) et 1) c), on sait que $a > 1$ et que

$$g(x) \geq 0 \text{ si } x \geq a$$

$$g(x) \leq 0 \text{ si } x \leq a$$



d) On a: $(T_2) \ y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$

$$= -\frac{4}{9}(x-2) + \frac{16}{3} = -\frac{4}{9}x + \frac{56}{9}.$$

e)

⑦

