Corrigé du partiel

exercice 1:

(a) On a $E \subset \mathbb{R}^2$ et :

1) $0 \in E$ car $0^2 + 0 \times 0 = 0$

2) Soient (x,y), $(x',y') \in E$ Alors $y^2 + xy = 0$ et $y'^2 + x'y' = 0$

On a : $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ d'où

$$\begin{aligned}(y+y')^2 + (x+x')(y+y') &= y^2 + y'^2 + 2yy' + xy + xy' + x'y + x'y' \\ &= \underbrace{(y^2+xy)}_{=0} + \underbrace{(y'^2+x'y')}_{=0} + 2yy' + xy' + x'y \\ &= 2yy' + xy' + x'y \\ &\neq 0 \text{ en général}\end{aligned}$$

$\left(\underline{\text{ex:}}\ \begin{matrix}(1,-1) \in E \\ (0,-1) \in E\end{matrix} \Rightarrow 2 \times (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0\right)$

donc $(x,y) + (x',y') \notin E$ en général

3) Soient $(x,y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $y^2 + xy = 0$

On a : $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ d'où

$$\begin{aligned}(\lambda y)^2 + (\lambda x)(\lambda y) &= \lambda^2 y^2 + \lambda^2 xy \\ &= \lambda^2 \underbrace{(y^2+xy)}_{=0} \\ &= \lambda^2 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda(x,y) \in E$

Finalement, E n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

(b) On a $F \subset \mathbb{R}^3$ et :

1) $0 \in F$ car $-0 + 2 \times 0 + 2 \times 0 = 0$

2) Soient (x,y,z), $(x',y',z') \in F$. Alors $-x + 2y + 2z = 0$ et $-x' + 2y' + 2z' = 0$

On a : $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ d'où

$$-(x+x') + 2(y+y') + 2(z+z') = \underbrace{(-x+2y+2z)}_{=0} + \underbrace{(-x'+2y'+2z')}_{=0} = 0$$

Donc $(x,y,z) + (x',y',z') \in F$

3) Soient $(x,y,z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $-x + 2y + 2z = 0$

On a : $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ d'où

$$-(\lambda x) + 2(\lambda y) + 2(\lambda z) = \lambda \underbrace{(-x+2y+2z)}_{=0} = \lambda \times 0 = 0$$

Donc $\lambda(x,y,z) \in F$

Finalement, F est un sev de $\mathbb{R}^3$

(c) Soit $(x,y,z) \in F$. Alors $-x+2y+2z=0$ soit $x = 2y+2z$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (2y+2z, y, z) \\ &= (2y,y,0)+(2z,0,z) \\ &= y(2,1,0)+z(2,0,1)\end{aligned}$$

Donc $F = \langle (2,1,0),(2,0,1) \rangle$.

Comme $(2,1,0)$ et $(2,0,1)$ ne sont pas colinéaires, $\{(2,1,0),(2,0,1)\}$ est une famille libre. Ainsi si $e_1 = (2,1,0)$ et $e_2 = (2,0,1)$, $\{e_1,e_2\}$ est une base de F

On a alors $\dim F = 2$.

(d) On a : $u = (2,-2,3) \in \mathbb{R}^3$ et $-2 + 2\times(-2) + 2\times 3 = -2-4+6 = 0$

donc $u \in F$.

Donc $u = a e_1 + b e_2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

soit $\begin{cases} 2\times a + 2\times b = 2 \\ 1\times a + 0\times b = -2 \\ 0\times a + 1\times b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b=2 \\ a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$ car $2\times(-2)+2\times 3 = 2$

Ainsi, $u = -2e_1 + 3e_2$.

exercice 2 :

On a : $A^T = \begin{bmatrix}-2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix}$

et

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} C \\ B & \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix} BC\end{array}$$

d'où $2A^T - 3BC = 2\begin{bmatrix}-2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}-3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-4 & 10 & 4 \\ 6 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & -8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}9 & 6 & -6 \\ -3 & 9 & 0 \\ -6 & 15 & -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 16 & -2 \\ 3 & 17 & 6 \\ -8 & 15 & -17\end{bmatrix}$

exercice 3:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & 7 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & -6 & 9 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+L_1 \\ L_4-3L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-2L_2 \\ L_3+3L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3/2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4+3L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1/2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ -2L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1-L_4 \\ L_2+3L_4 \\ L_3-1/2L_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1-3L_3 \\ L_2+L_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1+L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

exercice 4 :

On a : $\begin{cases} -x+2y-z=7 \\ 2x+y-3z=-4 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

On lui associe sa matrice augmentée à laquelle on va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -L_1 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & \boxed{5} & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2/5 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-5L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1+2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=-3 \\ y-z=2 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$ donc une infinité de solutions.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+z \\ y=2+z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{solution générale du système homogène associé}}, \quad z\in\mathbb{R}$

exercice 5 :

On a : $\begin{cases} x - by = 2 \\ ax + y = 1 \end{cases}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On lui associe sa matrice augmentée à laquelle on va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss en discutant au fur et à mesure suivant les valeurs de a et b :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -b & 2 \\ a & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - aL_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -b & 2 \\ 0 & \boxed{1+ab} & 1-2a \end{array}\right]$$

- Si $ab \neq -1$, on a :

$$\begin{array}{c} \\ L_2/(1+ab) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -b & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1-2a}{1+ab} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 + bL_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2+b}{1+ab} \\ 0 & 1 & \frac{1-2a}{1+ab} \end{array}\right]$$

car $2 + b \times \left(\frac{1-2a}{1+ab}\right) = \frac{2(1+ab) + b(1-2a)}{1+ab} = \frac{2 + \cancel{2ab} + b - \cancel{2ab}}{1+ab} = \frac{2+b}{1+ab}$

donc il y a une solution unique :

$$\begin{cases} x = \frac{2+b}{1+ab} \\ y = \frac{1-2a}{1+ab} \end{cases}$$

- Si $ab = -1$, on a :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -b & 2 \\ 0 & 0 & 1-2a \end{array}\right]$$

× si $a \neq \frac{1}{2}$, il n'y a aucune solution

× sinon $a = \frac{1}{2}$ donc $b = \frac{-1}{a} = -2$ et :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

d'où $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc une infinité de solutions : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

solution particulière   solution générale de l'équation homogène associée.