EXAMEN

Durée : 2 heures

(14)

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.***Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, -x - 2y + z, 3x + 6y - 3z).$$

- /0.5 a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
 /1.5 b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et sa dimension.
 /1.5 c) En déduire le rang de f , puis une base de $\text{Im } f$ en précisant sa dimension.
 /0.5 d) L'application f est-elle injective? Surjective?

Exercice 2 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(13.5)

1. Démontrer que cette matrice A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.

/0.5 2. En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 2 \\ -2x - 6y - 3z = -1 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & c-2 & -c+2 & c-11 \\ 2 & 3c+2 & -2c-7 & 6c-10 \\ 2 & -c+2 & -1 & -3c+18 \end{bmatrix}.$$

(12.5)

Exercice 4 - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

- /2.5 1. Calculer la matrice adjointe de B .
 /1.5 2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de y dans la solution du

système linéaire
$$\begin{cases} -2x - y + 4z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 3x + 5y - 3z = -1 \end{cases}$$

(12.5)

Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- /1.5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de C .
 /0.5 2. Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
 /1 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
 /0.5 4. La matrice C est-elle diagonalisable?

(13.5)