Corrigé du partiel de TQ2

Exercice 1:

1) On a: $f(x) = (x+2)^2 \times (2x-11)$

d'où $f'(x) = 2(x+2)(2x-11) + (x+2)^2 \times 2$

$= 2(x+2)(2x-11+x+2)$

$= 2(x+2)(3x-9)$

$= 6(x+2)(x-3)$

Ainsi, $f'(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 3$

De plus, $f''(x) = 6 \times [1 \times (x-3) + (x+2) \times 1]$

$= 6 \times (2x-1)$

Donc $f''(-2) = 6 \times (2 \times (-2) - 1) = -30 < 0$ donc (-2) est un maximum

$f''(3) = 6 \times (2 \times 3 - 1) = 30 > 0$ donc 3 est un minimum

On a alors:

x	$-\infty$		-2		$1/2$		3		$+\infty$
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\searrow$		-125	$\nearrow$	$+\infty$

car $f''(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = 1/2$

$f(-2) = 0$, $f(3) = (3+2)^2 \times (2 \times 3 - 11) = 25 \times (-5) = -125$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Donc (-2) est un maximum local et 3 est un minimum local.

2) On a : $f(x) = \ln(1-x^2)$ pour $x \in]-1;1[$

donc $f'(x) = \dfrac{(1-x^2)'}{1-x^2} = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

et $f''(x) = \dfrac{(-2x)' \times (1-x^2) - (-2x) \times (1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{-2 \times (1-x^2) - (-2x) \times (-2x)}{(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{-2 + 2x^2 - 4x^2}{(1-x^2)^2}$

$= \dfrac{-2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} < 0$ sur $]-1;1[$

Donc f est concave sur $]-1;1[$

3) On a en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x^3 + 5}{e^x - x^5 + \ln x}$

$\sim \dfrac{e^{2x}}{e^x}$

$\sim e^x$

car $\bullet$ $\dfrac{e^{2x} + x^3 + 5}{e^{2x}} = 1 + \dfrac{x^3}{e^{2x}} + \dfrac{5}{e^{2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ par thm de comparaison

donc $e^{2x} + x^3 + 5 \sim e^{2x}$

$\bullet$ $\dfrac{e^x - x^5 + \ln x}{e^x} = 1 - \dfrac{x^5}{e^x} + \dfrac{\ln x}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ par thm de comparaison

donc $e^x - x^5 + \ln x \sim e^x$

4) On rappelle que :

$$h(x) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} \times x + \frac{h''(0)}{2!} \times x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

or, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

$h(0) = 1$

$$h'(x) = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$h'(0) = 0$

$$h''(x) = \frac{(-x)' \times \sqrt{1-x^2} - (-x) \times \left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \times \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2}$$

$$= \frac{-(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}$$

$h''(0) = -1$

D'où $h(x) = 1 + \frac{0}{1} \times x + \frac{(-1)}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

5) On rappelle que :

$$j(x) = j(0) + \frac{j'(0)}{1!} \times x + \frac{j''(0)}{2!} \times x^2 + \frac{j^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{j^{(4)}(c)}{4!} x^4 \quad \text{avec } c$$

compris entre 0 et x

a) $f(x) = \sin(2x)$ | $f(0) = 0$

$f'(x) = 2\cos(2x)$ | $f'(0) = 2$

$f''(x) = -4\sin(2x)$ | $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x)$ | $f^{(3)}(0) = -8$

$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)$ | $f^{(4)}(c) = 16\sin(2c)$

d'où $f(x) = 0 + \frac{2}{1} \times x + \frac{0}{2} \times x^2 + \frac{(-8)}{6} \times x^3 + \frac{16\sin(2c)}{24} \times x^4$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2\sin(2c)}{3}x^4$$

b) On a $D_f = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 > 0 \text{ et } x_3 + x_4 \neq 0\}$

$$= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{x_4 = -x_3\}$$

et $\mathrm{Jac}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{pmatrix}$ avec $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{x_2^2\sqrt{x_1}}{x_3+x_4}$

$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \ln(x_2)$

$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_3 \cos(x_4) e^{x_1x_2}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{2\sqrt{x_1}(x_3+x_4)} & \ln(x_2) & x_2 x_3 \cos(x_4) e^{x_1x_2} \\ \frac{2x_2\sqrt{x_1}}{x_3+x_4} & x_1/x_2 & x_1 x_3 \cos(x_4) e^{x_1x_2} \\ -x_2^2\sqrt{x_1}/(x_3+x_4)^2 & 0 & \cos(x_4) e^{x_1x_2} \\ -x_2^2\sqrt{x_1}/(x_3+x_4)^2 & 0 & -x_3 \sin(x_4) e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1) On a : $f(x,y) = e^{-x^2+y^2+xy}$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial(-x^2+y^2+xy)}{\partial x} \times e^{-x^2+y^2+xy}$

$= (-2x+y)\, e^{-x^2+y^2+xy}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(-x^2+y^2+xy) \times e^{-x^2+y^2+xy}$

$= (2y+x)\, e^{-x^2+y^2+xy}$

2) On en déduit.

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2x+y)\, e^{-x^2+y^2+xy} \\ (2y+x)\, e^{-x^2+y^2+xy} \end{pmatrix}$$

donc $\text{grad } f = 0 \iff \begin{cases} -2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases}$ $\begin{array}{l} \iff y = 2x \\ \iff x = -2y = -2\times 2x \\ \iff 5x=0 \\ \iff x=0 \end{array}$

$\iff x=y=0$

Le seul point critique est le point $(0,0)$.

3) On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((-2x+y)\, e^{-x^2+y^2+xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x+y) \times e^{-x^2+y^2+xy} + (-2x+y)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2+y^2+xy}\right)$$

$$= -2\times e^{-x^2+y^2+xy} + (-2x+y)^2\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

$$= (4x^2+y^2-4xy-2)\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left((2y+x)\, e^{-x^2+y^2+xy} \right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y+x)\, e^{-x^2+y^2+xy} + (2y+x)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2+y^2+xy}\right)$$ (6)

$$= 2 \times e^{-x^2+y^2+xy} + (2y+x)^2\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

$$= (4y^2 + x^2 + 4xy + 2)\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{par le thm de Schwarz}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left((-2x+y)\, e^{-x^2+y^2+xy} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left((-2x+y) \right) e^{-x^2+y^2+xy} + (-2x+y)\, \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2+y^2+xy} \right)$$

$$= 1 \times e^{-x^2+y^2+xy} + (-2x+y)(2y+x)\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

$$= (-2x^2 + 2y^2 - 3xy + 1)\, e^{-x^2+y^2+xy}$$

4) a) On sait que $x^2 > 0$ donc $-x^2 < 0$

d'où $e^{-x^2} < e^0 = 1$ car exp est strict. $\nearrow$

donc $g(x) < g(0)$ d'où g admet un maximum local en 0.

b) De même, $y^2 > 0$ donc $e^{y^2} > e^0 = 1$ car exp est strict $\nearrow$

donc h admet un minimum local en 0.

c) La fonction $x \mapsto f(x,0) = g(x)$ admet un maximum local en 0 par 4).a) et la fonction $y \mapsto f(0,y) = h(y)$ admet un minimum local en 0 par 4) b) donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ sinon il y aurait une contradiction

5) a) On a : $ay^2 - (x - by)^2 = ay^2 - x^2 - b^2y^2 + 2bxy$

$$= -x^2 + (a - b^2)y^2 + 2bxy$$

$$= -x^2 + y^2 + xy$$

$\Leftarrow \begin{cases} a - b^2 = 1 \\ 2b = 1 \end{cases}$ $\Leftarrow a = 1 + b^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$\Leftarrow b = \frac{1}{2}$

donc $-x^2 + y^2 + xy = \frac{5}{4}y^2 - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2$

b) Ainsi, en $(0,0)$, la fonction $(x,y) \mapsto -x^2 + y^2 + xy$

n'est pas de signe constant : si $x = \frac{1}{2}y$, $-x^2 + y^2 + xy = \frac{5}{4}y^2 > 0$

si $y = 0$, $-x^2 + y^2 + xy = -x^2 < 0$

Comme $x \mapsto e^x$ est une fonction croissante,

$(0,0)$ n'est donc pas un extremum.