Univ. Paris VIII, 2015-2016

PARTIEL DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/11 **Exercice 1 -** Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/2.5 1. Trouver les extrema éventuels de la fonction $f(x) = (x+2)^2(2x-11)$ et en déterminer la nature.

/2 2. Etudier la convexité de la fonction $g(x) = \ln(1-x^2)$ sur $]-1, 1[$.

/1 3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\frac{e^{2x}+x^3+5}{e^x-x^5+\ln(x)}$.

/1.5 4. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

/1.5 5. Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 de la fonction $j(x) = \sin(2x)$.

/2.5 6. Calculer la matrice jacobienne de la fonction f suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_2^2\sqrt{x_1}}{x_3+x_4} \ , \ x_1\ln(x_2) \ , \ x_3\cos(x_4)e^{x_1x_2}\right).$$

/9 **Exercice 2 -** Dans ce problème on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-x^2+y^2+xy}.$$

/2 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

/0.5 2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de f (c'est-à-dire le(s) point(s) où le gradient s'annule).

/2.5 3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

4. (*a*) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2}$ admet en $x = 0$ un extremum local, et en préciser la nature. /1

   (*b*) Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(y) = e^{y^2}$. Démontrer qu'elle admet en $y = 0$ un extremum local, et en préciser la nature. /1

   (*c*) Le point $(0,0)$ est-il un extremum local pour la fonction f ? /0.5

5. (*a*) Déterminer des réels a et b tels qu'on ait

$$-x^2 + y^2 + xy = ay^2 - (x-by)^2.$$

/1

   (*b*) Retrouver ainsi le résultat de la question 4(*c*).

/0.5