2015-2016

Corrigé de l'examen de TQ2

Exercice 1 :

1). Om a $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$

d'où $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 36$

$= 6(x^2 + x - 6)$

- Om factorise :

$x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$

$x = \dfrac{-1 \pm 5}{2 \times 1} = -3$ ou 2

donc $f'(x) = 6(x+3)(x-2)$

Ainsi, $f'(x) = 0 \iff x = -3$ ou $x = 2$.

. Om a : $f''(x) = 6 \times (2x + 1)$

donc $f''(-3) = 6 \times (2 \times (-3) + 1) = -30 < 0$ donc -3 est un maximum

$f''(2) = 6 \times (2 \times 2 + 1) = 30 > 0$ donc 2 est un minimum.

d'où

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	96		$\searrow$		-29	$\nearrow$	$+\infty$

car $f''(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0$

$\iff x = -\frac{1}{2}$

$f(-3) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{36}{x^2} + \dfrac{15}{x^3}\right)$

$= 2 \times +\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{36}{x^2} + \dfrac{15}{x^3}\right)$

$= 2 \times (-\infty) = -\infty$

Donc -3 et 2 sont des extrema locaux.

2) On rappelle : $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$ (IPP)

d'où $\int_0^1 x e^{-3x} dx = \left[x \times \frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{e^{-3x}}{-3}\, dx$

$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$g'(x) = e^{-3x}$	$g(x) = \frac{e^{-3x}}{-3}$

$$= 0 - \frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-3x} dx$$

$$= -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{-3}}{3} + \left(-\frac{1}{9}\left(e^{-3} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{4}{9} e^{-3}$$

$$= \frac{(1 - 4e^{-3})}{9}$$

3) On rappelle $\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$ (changement de variable)

d'où $\int_1^3 \frac{2x}{x^2+2} dx = \int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int_a^b u'(x) f(u(x))\, dx$

$u(x) = x^2+2$	$a=1$
$u'(x) = 2x$	$b=3$
$f(u) = \frac{1}{u}$	$u(a)=3$
	$u(b)=11$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$$

$$= \int_3^{11} \frac{dt}{t}$$

$$= \left[\ln t\right]_3^{11}$$

$$= \ln 11 - \ln 3$$

4) a) Soit $0 < \varepsilon < 1$.

Alors $0 \leq \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$

donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$ ne converge pas.

b) Soit $M > 1$.

On a : $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$.

donc $0 \leq \int_1^M \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^M$

$\leq 1 - \frac{1}{M}$

≤ 1.

donc quand $M \to +\infty$, on a : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \leq 1$.

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ converge

Exercice 2 :

Cheveux \ Yeux	Bleu	Marron	Clair	Total
Châtain ou brun	61	127	97	285
Blond	163	42	38	243
Total	224	169	135	528

1) On a : $n_{13} = 97$

$n_{1+} = \sum_{j=1}^{3} n_{1j} = 285$

$n_{+2} = \sum_{i=1}^{2} n_{i2} = 169$

2) On a : $f_{2+} = \frac{n_{2+}}{n_{++}} = \frac{243}{528} \approx 0,46$

$f_{+1} = \frac{n_{+1}}{n_{++}} = \frac{224}{528} \approx 0,42$

3) On a : $f_{X=Blond/Y=clair} = \frac{n_{23}}{n_{+3}} = \frac{38}{135} = 28,1\%$

4) a) hypothèses

(H_0) X et Y sont indépendante

(H_1) X et Y sont liées

b) seuil

$\alpha = 0{,}05$

c) ddl

ddl $= (2-1) \times (3-1) = 2$

d) calcul des c_{ij}

X\Y	Bleu	Marron	Clair	Total
Chatain ou brun	120,9	91,2	72,9	285
Blond	103,1	77,8	62,1	243
Total	224	169	135	528

avec $c_{ij} = \dfrac{n_{i+} \times n_{+j}}{n_{++}}$

e) calcul du χ^2_c

X\Y	Bleu	Marron	Clair	Total
Chatain ou brun	29,7	14,1	8,0	51,8
Blond	34,8	16,5	9,4	60,7
Total	64,5	30,6	17,4	112,5

formule : $\dfrac{(c_{ij} - n_{ij})^2}{c_{ij}}$

donc $\chi^2_c = 112{,}5$

f) conclusion

On a alors $\chi^2_{(0{,}05\,;\,2)} = 5{,}99 < 112{,}5 = \chi^2_c$

Donc on rejette (H_0) : la couleur des yeux et la couleur des cheveux sont donc liées.

Exercice 3 :

1) On a : $\bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$= \dfrac{1}{9} (40 + 50 + \dots + 120)$

$= 80$ km/h

et $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$

$= \frac{1}{9} (8 + 12 + \ldots + 72)$

$= \frac{312}{9} \simeq 34,67 \, m$

De même, on a : $V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

$= \frac{1}{9} (40^2 + 50^2 + \ldots + 120^2) - 80^2$

$= 666,67 \; km^2/h^2$

et $V(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2$

$= \frac{1}{9} (8^2 + 12^2 + \ldots + 72^2) - 34,67^2$

$= 418,44 \, m^2$

Enfin, on a : $Cov(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$

$= \frac{1}{9} (40 \times 8 + 50 \times 12 + \ldots + 120 \times 72) - 80 \times 34,67$

$= 521,96$

2) On a : $r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{521,96}{\sqrt{666,67 \times 418,44}} = 0,99$

Comme r est très proche de 1, la corrélation est forte et positive.

3) a) On a : $\hat{a} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = \frac{521,96}{666,67} \simeq 0,78$

et $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = 34,67 - 0,78 \times 80$

$= -27,73$

Donc la droite de régression linéaire a pour équation :

$\hat{y} = 0,78x - 27,73$

b) On a : $\hat{y} = 0,78 \times 130 - 27,73$
$\simeq 73,67$

c) $\hat{y}$ n'est qu'une estimation : la corrélation n'étant pas parfaite, il peut y avoir des écarts à la droite de regression linéaire.

4) a) <u>hypothèses</u>

(H_0) absence de corrélation linéaire

(H_1) présence de corrélation linéaire

<u>b) seuil</u>

$\alpha = 0,05$

<u>c) ddl</u>

ddl $= 9 - 2 = 7$.

<u>d) calcul de T_c</u>

On a : $T_c = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{0,99 \times \sqrt{9-2}}{\sqrt{1-0,99^2}} \simeq 18,57$

<u>e) conclusion</u>

On a : $T_{(0,025\,;\,7)} = 2,365 < 18,57 = T_c$

Donc on rejette (H_0) : il y a bien une corrélation linéaire significative.

5) On a : $\sigma(\hat{a}) = \dfrac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \times \sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{418,44}{666,67}} \times \sqrt{\dfrac{1-0,99^2}{9-2}} = 0,042$

et $\sigma(\hat{b}) = \sigma(\hat{a})\sqrt{\sigma(x)^2 + \bar{x}^2}$

$= 0,042 \times \sqrt{666,67 + 80^2}$

$\simeq 3,53$

d'où $I_{\hat{a}} = [\hat{a} - \sigma(\hat{a})\,T_{(0,025,7)}\,;\,\hat{a} + \sigma(\hat{a})\,T_{(0,025;7)}]$

$= [0,78 - 0,042 \times 2,365\,;\,0,78 + 0,042 \times 2,365] = [0,68\,;\,0,88]$

$I_{\hat{b}} = [\hat{b} - \sigma(\hat{b})\, T_{(0,025;7)} \;;\; \hat{b} + \sigma(\hat{b})\, T_{(0,025;7)}]$

$= [-27,73 - 3,53 \times 2,365 \;;\; -27,73 + 3,53 \times 2,365]$

$= [-36,08 \;;\; -19,38]$

6) a) hypothèses

(H_0) absence de corrélation linéaire

(H_1) présence de corrélation linéaire

b) seuil

$\alpha = 0,05$

c) ddl

ddl $= (1, n-2) = (1, 7)$

d) calcul de F_c

On a : $F_c = T_c^2 = 18,57^2 = 344,84$

e) conclusion

On a : $F_{(0,05\,;\,1,7)} = 5,591 < 344,84$

Donc on rejette (H_0) : il y a bien une corrélation linéaire significative.