

EXAMEN DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Durée : 2 heures

Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème est donné à titre indicatif. Des tables de lois statistiques sont disponibles à la fin de l'énoncé.

Exercice 1 - (8 points) Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

- Déterminer les extrema éventuels de la fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$, et en déterminer la nature.
- En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 x e^{-3x} dx$.
- En utilisant la formule de changement de variable, calculer $\int_1^3 \frac{2x}{x^2+2} dx$.
- Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non (sans les calculer) :

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x^4} \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

Exercice 2 - (6 points) On effectue une étude pour savoir si la couleur des cheveux (notée X) et celle des yeux (notée Y) sont liées. On obtient les résultats suivants :

Cheveux (X)	Yeux (Y)	Bleu	Marron	Clair
Châtain ou brun		124	91	73
Blond		103	78	62

- Donner n_{13} , n_{1+} et n_{+2} .
- Calculer f_{2+} et f_{+1} .
- Calculer $f_{X= \text{Blond}} | Y= \text{Clair}$.
- Effectuer un test du χ^2 au seuil de signification de 5%. Conclure sur la dépendance entre X et Y .

Exercice 3 - (8 points) Le tableau suivant donne la distance de freinage (notée X) d'un véhicule automobile roulant sur route sèche, en fonction de sa vitesse (notée Y).

Vitesse x_i en km/h	Distance de freinage y_i en m
40	8
50	12
60	18
70	24
80	32
90	40
100	48
110	58
120	72

- Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $Cov(x, y)$.
- Calculer le coefficient de corrélation r , et interpréter le résultat obtenu.
- (a) En utilisant la méthode MCO, calculer les coefficients $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de la droite de régression de Y selon x .
(b) Donner une estimation de la distance de freinage d'un véhicule roulant à 130 km/h.
(c) En réalité la distance de freinage d'un véhicule roulant à 130 km/h est de 90m. Pourquoi l'estimation de la question (b) n'est-elle pas exacte ?
- Effectuer le test du coefficient de corrélation linéaire de Student au seuil de signification de 5 %.
- Calculer des intervalles de confiance de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ au seuil de signification de 5 %.
- Retrouver le résultat de la question 4 en effectuant un test de Fisher au seuil de signification de 5 %.

Annexe : tables de lois statistiques

Table du khi2

ddl \ t	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	10,83	7,88	6,64	5,02	3,84	2,71	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	13,82	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00
3	16,27	12,84	11,35	9,35	7,82	6,25	0,58	0,35	0,22	0,12	0,07	0,02
4	18,47	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,71	0,48	0,30	0,21	0,09
5	20,52	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	0,83	0,55	0,41	0,21
6	22,46	18,55	16,81	14,45	12,59	10,65	2,20	1,64	1,24	0,87	0,68	0,38
7	24,32	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	2,83	2,17	1,69	1,24	0,99	0,60
8	26,12	21,96	20,09	17,54	15,51	13,36	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34	0,86
9	27,88	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	4,17	3,33	2,70	2,09	1,74	1,15
10	29,59	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16	1,48
11	31,26	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	5,58	4,58	3,82	3,05	2,60	1,83
12	32,91	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07	2,21
13	34,53	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57	2,62
14	36,12	31,32	29,14	26,12	23,69	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66	4,08	3,04
15	37,70	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60	3,48
16	39,25	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14	3,94
17	40,79	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70	4,42
18	42,31	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	10,87	9,39	8,23	7,02	6,27	4,91
19	43,82	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84	5,41
20	45,31	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43	5,92
21	46,80	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03	6,45
22	48,27	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64	6,98
23	49,73	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26	7,53
24	51,18	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89	8,09
25	52,62	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52	8,65
26	54,05	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16	9,22
27	55,48	49,65	46,96	43,20	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81	9,80
28	56,89	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,57	12,46	10,39
29	58,30	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12	10,99
30	59,70	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79	11,59
31	61,10	55,00	52,19	48,23	44,99	41,42	21,43	19,28	17,54	15,66	14,46	12,20
32	62,49	56,33	53,49	49,48	46,19	42,59	22,27	20,07	18,29	16,36	15,13	12,81
33	63,87	57,65	54,78	50,73	47,40	43,75	23,11	20,87	19,05	17,07	15,82	13,43
34	65,25	58,96	56,06	51,97	48,60	44,90	23,95	21,66	19,81	17,79	16,50	14,06
35	66,62	60,28	57,34	53,20	49,80	46,06	24,80	22,47	20,57	18,51	17,19	14,69

Table de Student

ddl \ proba	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,328
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	1,553	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,661	3,055	3,93
13	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,646
18	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,08	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,5	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,45
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,385
60	1,296	1,671	2	2,39	2,66	3,232
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
120	1,289	1,658	1,98	2,358	2,617	3,16

Table de Fisher au seuil de 5%

n1 \ n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	60	120
1	161,446	18,513	10,128	7,709	6,608	5,987	5,591	5,318	5,117	4,965	4,543	4,351	4,242	4,171	4,001	3,820
2	199,489	19,000	9,552	6,944	5,786	5,143	4,737	4,459	4,256	4,103	3,682	3,493	3,385	3,316	3,150	3,072
3	215,707	19,164	9,277	6,591	5,408	4,757	4,347	4,066	3,863	3,708	3,287	3,098	2,991	2,922	2,758	2,680
4	224,583	19,247	9,117	6,388	5,192	4,534	4,120	3,838	3,633	3,478	3,056	2,866	2,759	2,690	2,525	2,447
5	230,160	19,296	9,013	6,256	5,050	4,387	3,972	3,688	3,482	3,326	2,901	2,711	2,603	2,534	2,368	2,290