Corrigé de l'examen

Exercice 1 :

1) Pour être reçu à l'examen, il faut une note supérieure à 10/20 donc le pourcentage d'étudiants reçus à l'examen est de $\frac{31+24}{100} = 55\%$.

2) On rappelle la formule : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i$

classes	n_i	x_i	$n_i x_i$	f_i	f_{icc}
[0;5[	5	2,5	12,5	0,05	0,05
[5;8[	17	6,5	110,5	0,17	0,22
[8,10[	23	9	207	0,23	0,45
[10;14[	31	12	372	0,31	0,76
[14;20[	24	17	408	0,24	1
Total	100	/	1110	1	/

d'où $\bar{x} = \frac{1}{100} \times (5 \times 2,5 + 17 \times 6,5 + 23 \times 9 + 31 \times 12 + 24 \times 17)$

$= \frac{1110}{100} = 11,1$.

La note moyenne est donc de 11,1/20.

3) On calcule d'abord les $f_i = \frac{n_i}{n}$ puis les $f_{icc} = \sum_{j \leq i} f_j$ (voir tableau 2))

On remarque alors que la classe médiane est [10;14[.

On a donc que $Me = \frac{(0,5 - 0,45)}{(0,76 - 0,45)} \times (14-10) + 10 \approx 10,6$

La note médiane est alors de 10,6/20.

Exercice 2:

1) On a: $E = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{2x+3}{x+1} < 0 \}$.

Or, d'après le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x+1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

on en déduit que $E =]-\frac{3}{2} ; -1[$

Donc le minimum et le maximum n'existent pas

mais $\inf E = -\frac{3}{2}$ et $\sup E = -1$.

2) • Quand $x \to \pm\infty$, on a:

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4} = \frac{\cancel{x^2}(1+1/x-2/x^2)}{\cancel{x^2}(1+3/x-4/x^2)}$$

$$= \frac{(1+1/x-2/x^2)}{(1+3/x-4/x^2)}$$

$$\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1+0-0}{1+0-0} = 1$$

donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

• quand $x \to -4$, on a: $(-4)^2+(-4)-2 = 10 \neq 0$
$(-4)^2 + 3\times(-4) - 4 = 0$

On factorise donc le dénominateur:

$x^2+3x-4=0$

$\Delta = 3^2-4\times 1\times(-4) = 9+16 = 25$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3\pm 5}{2} = -4 \text{ ou } 1.$$

donc $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x+4)(x-1)}$

et $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} \xrightarrow[x\to -4]{} \dfrac{10}{-5} = -2$

donc $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = (-2)\times\dfrac{1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = (-2)\times\dfrac{1}{0^+} = -\infty$

Quand $x\to 1$, $1^2+1-2=0$.

On factorise alors le numérateur :

$x^2+x-2=0$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1\pm 3}{2} = -2 \text{ ou } 1.$$

donc $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

Finalement, $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+4)\cancel{(x-1)}}$

$= \dfrac{x+2}{x+4}$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1+2}{1+4} = \dfrac{3}{5}$.

3) Quand $x \to +\infty$, on a :

$$\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2-x+2)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2-x+2-x^2+1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\cancel{x}\,(-1+3/x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{-1+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1-0}} = -\frac{1}{2}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-1}\right) = -\frac{1}{2}$

4) On sait que g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$.

De même, comme g est constante sur $]-\infty,0[$, g est continue et dérivable sur $]-\infty,0[$.

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln(x) = 0$ par croissance comparée,
$= g(0)$

g est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$

On a: $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln x - 0}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0^+} x \ln x$

$= 0$ par croissance comparée

donc g est dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Finalement, g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

5) On a: $D_h = \mathbb{R}^*$ car $\begin{cases} x \mapsto e^{3x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}. \\ x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*. \end{cases}$

D'où $h'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = e^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$= \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x)$

$= \frac{3e^{3x} \times x - e^{3x} \times 1}{x^2}$ car $\begin{cases} u'(x) = 3e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$= e^{3x} \frac{(3x-1)}{x^2}$

Exercice 3:

1) a) On a $D_g =]0;+\infty[$ car $\begin{cases} x \mapsto x \text{ définie sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{2\ln 2} \text{ définie sur }]0;+\infty[\end{cases}$

Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 - \infty = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \infty + \infty = +\infty$

b) Comme g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, on a :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x\,2\ln 2}$$

c) On a :

x	0		$+\infty$
g'		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) on a : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(1/2)}{2\ln 2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2\ln 2}$$

$$= 0$$

Comme g est croissante strictement d'après 1) c), et que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

on a : $g(x) < 0$ pour $x < \frac{1}{2}$

$g(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$.

2) a) On a $D_f = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ car $f(x) = \sqrt{g(x)}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}+$ et $g(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ d'après 1) d).

b) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{0} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\infty + \infty} = +\infty$

c) On sait que $f(x)=\sqrt{g(x)}$

d'où $f'(x) = (u \circ v)'(x)$ avec $\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} \\ v(x)=g(x) \end{cases}$

$= v'(x) \times u'(v(x))$

$= \left(1+\frac{1}{x \times 2\ln 2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x+\frac{\ln x}{2\ln 2}}}$ car $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = g'(x) = 1 + \frac{1}{x 2\ln 2} \end{cases}$

d) $f'(x) > 0$ car $\begin{cases} 1+\frac{1}{x \times 2\ln 2} > 0 \text{ sur }]\frac{1}{2};+\infty[\\ 2\sqrt{x+\frac{\ln x}{2\ln 2}} > 0 \text{ sur }]\frac{1}{2};+\infty[\end{cases}$

donc :

x	$1/2$		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

- f ne possède pas d'asymptote verticale car f est définie sur $[\frac{1}{2};+\infty[$
- f ne possède pas d'asymptote horizontale car la limite de f en $+\infty$ n'est pas finie

e) on a :

(T_1) $\quad y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$= \left(1+\frac{1}{2\ln 2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{0}{2\ln 2}}} \times (x-1) + \sqrt{1+\frac{0}{2\ln 2}}$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\ln 2}\right) x - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\ln 2}\right) + 1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\ln 2}\right) x + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\ln 2}\right)$

f) On sait que f est continue sur $[1/2;+\infty[$ comme composée de fonctions continues, strictement $\nearrow$ d'après 2)d) tq $\begin{cases} f(1/2) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$,

donc par le corollaire du thm des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]1/2;+\infty[$ tq $f(\alpha) = 2$.

On a:

$f(1) = 1 < 2$

$f(2) = 1,6 < 2$

$f(3) = 1,9 < 2$

$f(4) = 2,2 > 2$

$f(3.5) = 2,1 > 2$

$f(3.3) = 2,04 > 2$

$f(3.1) = 1,98 < 2$

$f(3.2) = 2,01 > 2$

donc $3.1 < \alpha < 3.2$