

sur 125 mais uniquement 1h40 d'examen

EXAMEN 2ÈME SESSION

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (-x + 3y + z, y + z, 2x - y + 3z).$$

- 1/5 10.5 a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.
10.5+1+1+1+10.5 b) Donner une famille génératrice de $\text{Im} f$. Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de $\text{Im} f$.
10.5+1 c) En déduire la dimension de $\text{Ker} f$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

14.5 **Exercice 2** - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- 1/3.5 1. Démontrer que cette matrice A est inversible, et calculer son inverse en utilisant le pivot de Gauss.
1/1 2. En déduire la solution du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = -6 \\ 2x + z = 1 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases}$$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

1/3
$$\begin{bmatrix} c-2 & 0 & 0 & 2c-4 \\ 0 & c+1 & -c-1 & 0 \\ 0 & -c-1 & c+3 & -4 \\ 2c-4 & 0 & -4 & 4c+1 \end{bmatrix}$$

1/5 **Exercice 4** - Dans cet exercice, on considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

- 1/3.5 1. Calculer la matrice adjointe de B .
1/1.5 2. En déduire l'inverse de B .

1/3 **Exercice 5** - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de x dans la solution du système linéaire
$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + 2y = 3 \\ -x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

- 1/4.5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de C .
1/1 2. Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.
1/1.5 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
1/0.5 4. La matrice C est-elle diagonalisable ?