Corrigé du partiel

Exercice 1

(a) On a $E \subset \mathbb{R}^3$ et

1) $0 \notin E$ car $3 \neq 0$

2) Soient $X = (2x+1, x-2, 3) \in E$
$X' = (2x'+1, x'-2, 3)$

Alors $X + X' = (2x+1+2x'+1, x-2+x'-2, 3+3)$
$= (2(x+x')+2, (x+x')-4, 6)$
$\notin E$ car $6 \neq 3$

3) Soient $X = (2x+1, x-2, 3) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda X = (2\lambda x + \lambda, \lambda x - 2\lambda, 3\lambda)$
$\notin E$ car $3\lambda \neq 3$ en général (si $\lambda \neq 1$)

Donc E n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a $F \subset \mathbb{R}^3$ et

1) $0 \in F$ car $2 \times 0 - 0 + 7 \times 0 = 0$

2) Soient $X = (x, y, z)$ $\in E$ donc $\begin{cases} 2x - y + 7z = 0 \\ 2x' - y' + 7z' = 0 \end{cases}$
$X' = (x', y', z')$

Alors $X + X' = (x+x', y+y', z+z')$

et on a : $2(x+x') - (y+y') + 7(z+z') = (2x - y + 7z) + (2x' - y' + 7z')$
$= 0 + 0$
$= 0$

Donc $X + X' \in E$

3) Soient $X = (x, y, z) \in E$ (donc $2x - y + z = 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
et on a : $2(\lambda x) - (\lambda y) + 7(\lambda z) = \lambda(2x - y + 7z) = \lambda \times 0 = \lambda$
Donc $\lambda X \in E$

Finalement, F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(c) Soit $X=(x,y,z) \in F$ donc $2x-y+7z=0$ soit $y=2x+7z$

donc $X = (x, 2x+7z, z)$

$= x(1,2,0) + z(0,7,1)$

On pose $e_1 = (1,2,0)$ et $e_2 = (0,7,1)$.

On a bien $F = \langle e_1, e_2 \rangle$ car si $X=(x,y,z) \in F$ alors $X = xe_1 + ze_2$.

et $\{e_1, e_2\}$ est une famille libre car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

Donc $\{e_1, e_2\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

(d) On a bien $u \in F$ car $2\times 3 - (-1) + 7\times(-1) = 0$.

et $v \in F$ car $2\times(-2) - 3 + 7\times 1 = 0$

Montrons que $\langle u, v\rangle = F$.

Soit $X=(x,y,z) \in F$ donc $2x-y+7z=0$.

On veut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tq $au+bv = X$.

$$\iff \begin{cases} 3a - 2b = x \\ -a + 3b = 2x+7z \\ -a + b = z. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a - 2b = x \\ (L_3)-(L_2) : 2b = 2x+7z-z = 2x+6z \\ -a+b = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a-2b = x \\ b = x+3z \\ a = b-z = x+3z-z = x+2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(x+2z) - 2(x+3z) = x \text{ vrai} \\ b = x+3z \\ a = x+2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = x+2z \\ b = x+3z \end{cases}$$

Donc $X = (x+2z)\,u + (x+3z)\,v$

Finalement $\langle u, v \rangle = F$.

Comme u et v ne sont pas colinéaires, $\{u, v\}$ est libre donc c'est une base de F.

Exercice 2 :

On a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} B \\ A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 5 & -14 & -2 \\ 9 & 2 & -4 \end{bmatrix} AB \end{array}$$

Donc $2(AB)^T - 5C = 2 \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 5 & -14 & -2 \\ 9 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T - 5 \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= 2 \begin{bmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 8 & -14 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 15 & 25 \\ 20 & -35 & 5 \\ 5 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 10 & 18 \\ 16 & -28 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -15 & -25 \\ -20 & 35 & -5 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & -7 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

On a :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+3L_1 \\ L_3-2L_1 \\ L_4+L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3+L_2 \\ L_4-L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4+3L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1+L_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1-L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

exercice 4:

On a : $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+2y+3z=2 \\ -2x+3y-z=-3 \end{cases}$

On lui associe la matrice augmentée suivante à laquelle on applique le pivot de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+L_1 \\ L_3+2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2/4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-7L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{-13/2} & -13/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -L_3/(\frac{13}{2}) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1+L_3 \\ L_2-\frac{1}{2}L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Il y a donc une solution unique $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

exercice 5:

On a: $\begin{cases} ax+5y+2z=4a-4 \\ x+3y+az=a-1 \\ -2x-y+2z=-a-2 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On lui associe la matrice augmentée suivante à laquelle on applique le pivot de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 5 & 2 & 4a-4 \\ 1 & 3 & a & a-1 \\ -2 & -1 & 2 & -a-2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & a-1 \\ a & 5 & 2 & 4a-4 \\ -2 & -1 & 2 & -a-2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-aL_1 \\ L_3+2L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & a-1 \\ 0 & (5-3a) & (2-a^2) & -a^2+5a-4 \\ 0 & 5 & (2+2a) & a-4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & a-1 \\ 0 & \boxed{5} & (2+2a) & a-4 \\ 0 & (5-3a) & (2-a^2) & -a^2+5a-4 \end{array}\right]$$

$$L_2/5\begin{bmatrix} 1 & 3 & a & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{2+2a}{5} & \frac{a-4}{5} \\ 0 & (5-3a) & (2-a^2) & -a^2+5a-4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-(5-3a)L_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & a & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{2+2a}{5} & \frac{a-4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{a^2-4a}{5} & \frac{-2a^2+8a}{5} \end{bmatrix}$$

or, $a^2-4a = a(a-4)$.

- si $a=0$, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1-3L_2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x - \frac{6}{5}z = 7/5 \\ y + \frac{2}{5}z = -4/5 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -4/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -6/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$.

- si $a=4$, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1-3L_2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$

- Sinon $a \neq 0, 4$ donc on peut diviser par $\frac{a(a-4)}{5}$ et on a :

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ L_3/\left(\frac{a(a-4)}{5}\right)
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & a & a-1 \\
0 & 1 & \frac{2+2a}{5} & \frac{a-4}{5} \\
0 & 0 & 1 & -2
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c}
L_1 - aL_3 \\ L_2 - \frac{2+2a}{5}L_3 \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 0 & 3a-1 \\
0 & 1 & 0 & a \\
0 & 0 & 1 & -2
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c}
L_1 - 3L_2 \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & a \\
0 & 0 & 1 & -2
\end{array}\right]
$$

D'où une solution unique $\begin{cases} x = -1 \\ y = a \\ z = -2 \end{cases}$