Corrigé de l'examen

exercice 1:

a) $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ -4 & 2 & 6\end{bmatrix}$

b) On sait que $\operatorname{Im} f = \left\langle f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ -4 & 2 & 6\end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+4L_1 \end{array}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -7\\ 0 & 14 & 14\end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} \\ \\ L_3+2L_2 \end{array}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} \\ L_2/(-7) \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc} & C_2-C_3 & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc} & C_2-C_1 & C_3-2C_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 2$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

c) On en déduit par le thm du rang que :

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$.

Donc f n'est pas injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ (car $\dim \operatorname{Ker} f = 1$)

et f n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ (car $\dim \operatorname{Im} f = 2$).

exercice 2 :

1) On a :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3+L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3/2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1+L_3 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Donc A est inversible.

<u>verif:</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 9/2 & 1/2 & -3/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ok!

Donc $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & 1/2 & -3/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

2) On a : $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-3y+3z=-4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{cases} \iff AX=B$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

et $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$= \begin{pmatrix} 9/2 & 1/2 & -3/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc le système admet une unique solution $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

exercice 3:

On sait qu'une matrice est inversible ssi son déterminant est non nul.

On a: $\det \left(\begin{bmatrix} -3c-4 & 3 & -1 & 0 \\ -3c & 1 & 2 & 1 \\ 5c+5 & -c & -4c+3 & 2 \\ -4c & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - cL_2 \end{array} \begin{vmatrix} -3c-4 & 3 & -1 & 0 \\ -3c & 1 & 2 & 1 \\ 11c+5 & -c-2 & -4c-1 & 0 \\ -4c+3c^2 & 1-c & 1-2c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -3c-4 & 3 & -1 \\ 11c+5 & -c-2 & -4c-1 \\ -4c+3c^2 & 1-c & 1-2c \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 - (3c+4)C_3 & C_2 + 3C_3 & \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11c+5-(3c+4)(-4c-1) & -13c-5 & -4c-1 \\ -4c+3c^2-(3c+4)(1-2c) & 4-7c & 1-2c \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ (12c^2+30c+9) & (-13c-5) & (-4c-1) \\ (9c^2+c-4) & (4-7c) & (1-2c) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\times(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} (12c^2+30c+9) & (-13c-5) \\ (9c^2+c-4) & (4-7c) \end{vmatrix}$$

$$= -\left[(12c^2+30c+9)(4-7c)-(9c^2+c-4)(-13c-5)\right]$$

$$= -\left(48c^2+120c+36-84c^3-210c^2-63c-(-117c^3-13c^2+52c-45c^2-5c+20)\right)$$

$$= -33c^3+104c^2-10c-16$$

Donc la matrice est inversible ssi $-(33c^3-104c^2+10c+16)\neq 0$

exercice 4:

1) On a: $\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} (6\times2-(-7)(-3)) & -((-8)\times2-8\times(-3)) & ((-8)(-7)-8\times6) \\ -(3\times2-(-7)(-1)) & ((-3)\times2-8\times(-1)) & -((-3)(-7)-8\times3) \\ (3\times(-3)-6\times(-1)) & -((-3)(-3)-(-8)(-1)) & ((-3)\times6-(-8)\times3) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -9 & 1 & -3 \\ -8 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2) On a : $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \times \operatorname{adj} B$.

or, $\det B = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -8 & 6 & -3 \\ 8 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1-3C_3 & C_2+3C_3 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)\times(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(1\times(-1) - 2\times(-3)\right)$$

$$= -(-1+6) = -5$$

donc $B^{-1} = -\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -9 & 1 & -3 \\ -8 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

exercice 5 :

On a : $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 1 \\ 8x + y - 10z = 1 \end{cases} \iff AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

D'où $z = \dfrac{\det A_3}{\det A}$ avec $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

on a : $\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{l} \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times \left((-2)\times 1 - 1 \times (-3) \right)$$

$$= 5 \times (-2+3)$$

$$= 5 \times 1 = 5$$

et $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & -10 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{l} L_1+2L_2 \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\begin{vmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \times (-5) - 5 \times (-12)$$

$$= -45 + 60$$

$$= 15$$

donc $z = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

exercice 6:

1) On a $P(\lambda) = \det(C - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} -8-\lambda & 6 \\ -9 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-8-\lambda)(7-\lambda) - (-9)\times 6$$

$$= -56 + 8\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 54$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

2) On résoud : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2)$$

$$= 9 = 3^2$$

donc $\lambda = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = -2$ ou 1

D'où $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$

Donc C possède 2 valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$

Ce sont des valeurs propres simples.

3) On a :

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -8x + 6y = x$$

$$\Leftrightarrow -9x = -6y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$$

Donc $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$

Comme λ_1 est de multiplicité 1, $E_1 = \langle v_1 \rangle$ donc v_1 est une base de E_1.

De même, $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff -8x+6y=-2x$

$\iff 6x = 6y$

$\iff x = y$

Donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = -2$

Comme λ_2 est de multiplicité 1, $E_2 = \langle v_2 \rangle$ donc v_2 est une base de E_2

4) Comme C possède 2 valeurs propres $\neq$ simples, C est diagonalisable.