Corrigé du partiel de MQ2

exercice 1 :

1) On a : $f(x) = (x+1)^2(2x+5)$

D'où $f'(x) = 2(x+1)(2x+5) + (x+1)^2 \times 2$ (en utilisant la dérivée du produit)

$$= 2(x+1)(2x+5+x+1)$$

$$= 2(x+1)(3x+6)$$

Ainsi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$

On a maintenant : $f''(x) = 2\left[1 \times (3x+6) + (x+1) \times 3\right]$

$$= 2(3x+6+3x+3)$$

$$= 2(6x+9)$$

Ainsi, $f''(-1) = 2 \times (-6+9) = 6 > 0$

Donc (-1) est un minimum

et $f''(-2) = 2 \times (-12+9) = -6 < 0$

Donc (-2) est un maximum.

On dresse le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = (-1)^2 \times (-4+5) = 1$

$f(-1) = 0$

Donc (-2) est un maximum local et (-1) un minimum local !

2) On a $g(x) = \sqrt{2x^2+3x+5}$ (qui est bien défini sur $\mathbb{R}$ car $2x^2+3x+5>0$)

d'où $g'(x) = \dfrac{2\times 2x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+5}}$

$= \dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+5}}$

et $g''(x) = \dfrac{4\times\sqrt{2x^2+3x+5} - (4x+3)\times\dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+5}}}{2\,(2x^2+3x+5)}$

$= \dfrac{8\times(2x^2+3x+5) - (4x+3)^2}{4(2x^2+3x+5)\sqrt{2x^2+3x+5}}$

$= \dfrac{\cancel{16x^2}+\cancel{24x}+40-\cancel{16x^2}-\cancel{24x}-9}{4\,(2x^2+3x+5)\sqrt{2x^2+3x+5}}$

$= \dfrac{31}{4\,(2x^2+3x+5)\sqrt{2x^2+3x+5}}$

Ainsi $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc g est convexe sur $\mathbb{R}$

3) On a $x^3+3x^2-5x+7 \underset{+\infty}{\sim} x^3$

et $3x^2 - x\ln x + \sqrt{x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} 3x^2$

Donc $\dfrac{x^3+3x^2-5x+7}{3x^2-x\ln x+\sqrt{x}-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{3x^2}$

$\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{3}$

4) On sait que :

$$h(x) = h(0) + x\,h'(0) + \frac{x^2}{2} h''(0) + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Or,

$$h(x) = \ln(1 - x^2)$$

$$h'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$h''(x) = \frac{(-2) \times (1 - x^2) - (-2x)(-2x)}{(1 - x^2)^2}$$

$$= \frac{-2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 - x^2)^2}$$

$$= \frac{-2 - 2x^2}{(1 - x^2)^2}$$

$$h(0) = \ln(1) = 0$$

$$h'(0) = 0$$

$$h''(0) = \frac{-2}{1^2} = -2$$

D'où

$$h(x) = 0 + x \times 0 + \frac{(-2)}{2} \times x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

$$= -x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

5) On sait que :

$$j(x) = j(0) + x\,j'(0) + \frac{x^2}{2} j''(0) + \frac{x^3}{6} j^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} \times j^{(4)}(c)$$

avec c compris entre 0 et x.

Or,

$$j(x) = e^{-4x}$$

$$j'(x) = (-4) e^{-4x}$$

$$j''(x) = 16 e^{-4x}$$

$$j^{(3)}(x) = -64 e^{-4x}$$

$$j^{(4)}(x) = 256 e^{-4x}$$

$$j(0) = 1$$

$$j'(0) = -4$$

$$j''(0) = 16$$

$$j^{(3)}(0) = -64$$

$$j^{(4)}(c) = 256 e^{-4c}$$

D'où

$$j(x) = 1 + (-4)\times x + \frac{16}{2}x^2 + \frac{(-64)}{6}x^3 + \frac{256}{24}x^4 e^{-4c}$$

$$= 1 - 4x + 8x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^4 e^{-4c}$$

6) On a :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)\right)$$

avec $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3^3 \sqrt{x_2+2}$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{x_2}}{x_3+1}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_2)\sqrt{1+x_1^2 x_3^2}$$

et $D_{f_1} = \mathbb{R} \times [-2; +\infty[\times \mathbb{R}$

$D_{f_2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$D_{f_3} = \mathbb{R}^3$

D'où $D_f = \mathbb{R} \times [-2; +\infty[\times (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$

On a : $\text{Jac}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 x_3^3 \sqrt{x_2+2} & 0 & \frac{\cos(x_2)\, x_1 x_3^2}{\sqrt{1+x_1^2 x_3^2}} \\ \frac{x_1^2 x_3^3}{2\sqrt{x_2+2}} & \frac{e^{x_2}}{x_3+1} & -\sin(x_2)\sqrt{1+x_1^2 x_3^2} \\ 3x_1^2 x_3^2 \sqrt{x_2+2} & \frac{-e^{x_2}}{(x_3+1)^2} & \frac{\cos(x_2)\, x_1^2 x_3}{\sqrt{1+x_1^2 x_3^2}} \end{pmatrix}$$

7) On a:

$$\int_0^{\pi/2} x \times \cos x \, dx = \left[x \times \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times \sin x \, dx$$

$f(x) = x$ $g'(x) = \cos x$	$f'(x) = 1$ $g(x) = \sin x$

$$= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 - \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

8) On a:

$$\int_0^1 x \, e^{x^2 - 1} \, dx = \int_0^1 \frac{2x}{2} \, e^{u(x)} \, dx$$

$u(x) = x^2 - 1$ $u'(x) = 2x$ $f(u) = e^u$	$a = 0$ $b = 1$ $u(a) = -1$ $u(b) = 0$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b u'(x) \, e^{u(x)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b u'(x) \, f(u(x)) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} e^u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^u\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} \left(e^0 - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1 - 1/e}{2}$$

9) Soit $n > 1$. On a:

$$0 \leq \int_1^n \frac{dx}{2 + x^2} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^2}$$

$$\leq \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$$

$$\leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\leq 1$$ donc $\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{dx}{2 + x^2}$ existe

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$ est convergente.

Exercice 2 :

1) On a : $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial (1+x^2-y^2)}{\partial x}}{(1+x^2-y^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(1+x^2-y^2)^2}$

et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2-y^2)}{(1+x^2-y^2)^2}$

$= \frac{2y}{(1+x^2-y^2)^2}$

2) Ainsi, $\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{(1+x^2-y^2)^2} \\ \frac{2y}{(1+x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$

et $\text{grad } f = 0 \iff x = y = 0$

Donc il y a un unique point critique : $(0,0)$.

3) On a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{(1+x^2-y^2)^2}\right)$

$= \frac{-2 \times (1+x^2-y^2)^2 - (-2x) \times 2 \times 2x \times (1+x^2-y^2)}{(1+x^2-y^2)^4}$

$= \frac{-2 - 2x^2 + 2y^2 + 8x^2}{(1+x^2-y^2)^3}$

$= \frac{-2 + 6x^2 + 2y^2}{(1+x^2-y^2)^3}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{(1+x^2-y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2\times(1+x^2-y^2)^2 - 2y\times 2\times(-2y)\times(1+x^2-y^2)}{(1+x^2-y^2)^4}$$

$$= \frac{2+2x^2-2y^2+8y^2}{(1+x^2-y^2)^3}$$

$$= \frac{2+2x^2+6y^2}{(1+x^2-y^2)^3}$$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ par le théorème de Schwarz

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{(1+x^2-y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{-2\times(-2x)\times(-2y)}{(1+x^2-y^2)^3}$$

$$= \frac{-8xy}{(1+x^2-y^2)^3}$$

4) (a) On a : $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

d'où $g'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Ainsi $g'(x) = 0 \iff x = 0$.

De plus, $g''(x) = \dfrac{(-2)\times(1+x^2)^2 - (-2x)\times 2\times(2x)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$

$$= \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$$

donc $g''(0) = -2 < 0$

D'où 0 est un maximum local pour g.

(b) On a : $h(y) = \frac{1}{1-y^2}$

d'où $h'(y) = \frac{-(-2y)}{(1-y^2)^2} = \frac{2y}{(1-y^2)^2}$

Ainsi, $h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

De plus, $h''(y) = \frac{2 \times (1-y^2)^2 - 2y \times 2 \times (-2y) \times (1-y^2)}{(1-y^2)^2}$

$= \frac{2 - 2y^2 + 8y^2}{(1-y^2)^3}$

$= \frac{2 + 6y^2}{(1-y^2)^3}$

donc $h''(0) = 2 > 0$

D'où 0 est un minimum local pour h.

(c) On a : $f(x,0) = g(x)$ qui a un maximum en 0
et $f(0,y) = h(y)$ qui a un minimum en 0

D'où $(0,0)$ n'est pas un extremum de f : c'est un point selle.