

PARTIEL DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.
Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 - (14 points) Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

- /2.5 1. Trouver les extrema éventuels de la fonction $f(x) = (x+1)^2(2x+5)$ et en déterminer la nature.
- /2 2. Etudier la convexité de la fonction $g(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$ sur $\mathbb{R}$.
- /0.5 3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\frac{x^3+3x^2-5x+7}{3x^2-x\ln(x)+\sqrt{x}-1}$.
- /4.5 4. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h(x) = \ln(1-x^2)$.
- /4.5 5. Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 de la fonction $j(x) = e^{-4x}$.
6. Calculer la matrice jacobienne de la fonction f suivante (en précisant son ensemble de définition) :
- /2.5
$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 x_3^3 \sqrt{x_2 + 2}, \frac{e^{x_2}}{x_3 + 1}, \cos(x_2) \sqrt{1 + x_1^2 x_3^2} \right).$$
- /4.5 7. En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$.
- /4.5 8. En utilisant la formule de changement de variable, calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$.
- /0.5 9. Etudier si l'intégrale généralisée suivante converge ou non (sans la calculer) : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$.

Exercice 2 - (8 points) Dans ce problème on pose

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1 + x^2\}$$

et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ on définit

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 - y^2}.$$

- /2 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- /0.5 2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de f (c'est-à-dire le(s) point(s) où le gradient s'annule).
- /3 3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
- /4 4. (a) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ admet en $x = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
- /4 (b) Notons h la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $h(y) = \frac{1}{1-y^2}$. Démontrer qu'elle admet en $y = 0$ un extremum local, et en préciser la nature.
- /0.5 (c) En déduire la nature du point $(0, 0)$ pour la fonction f .