Corrigé de l'examen de MQ2

Exercice 1:

1) Comme $x \geq 1$, $x^2+1 \geq 1 > 0$ donc la fonction f est bien définie sur $[1;+\infty[$

. On a: $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

et $f''(x) = \dfrac{(2x)' \times (x^2+1) - 2x \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2(x^2+1) - (2x)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \leq 0$$ car $x \geq 1$ donc $x^2 \geq 1$ d'où $1-x^2 \leq 0$

Donc la fonction est concave sur $[1;+\infty[$ car $f''(x) \leq 0$ sur cet intervalle.

2) On a:

$g(x) = \sin(5x)$	$g(0) = 0$
$g'(x) = 5\cos(5x)$	$g'(0) = 5$
$g''(x) = -25\sin(5x)$	$g''(0) = 0$
$g^{(3)}(x) = -125\cos(5x)$	$g^{(3)}(0) = -125$

Donc $g(x) = g(0) + g'(0) \times \dfrac{x}{1!} + g''(0) \times \dfrac{x^2}{2!} + g^{(3)}(0) \times \dfrac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x)$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

En remplaçant, on obtient : $g(x) = 0 + 5x + 0\,\frac{x^2}{2} + (-125)\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

$$= 5x - \frac{125}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

3) On a : $h(x_1, x_2, x_3) = (h_1(x_1,x_2,x_3), h_2(x_1,x_2,x_3), h_3(x_1,x_2,x_3))$

avec $h_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{\sqrt{x_2^2+3}}{x_3-3}$ définie pour $x_3 \neq 3$

$h_2(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1x_2+1}$ définie sur $\mathbb{R}^3$

$h_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 x_3^2 \ln(x_1+5)$ définie pour $x_1 > -5$.

Donc h est définie sur $]-5;+\infty[\times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\setminus\{3\})$

On a : $\text{Jac}\, h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x_2 e^{x_1x_2+1} & \frac{x_2 x_3^2}{x_1+5} \\ \frac{x_2}{(x_3-3)\sqrt{x_2^2+3}} & x_1 e^{x_1x_2+1} & x_3^2 \ln(x_1+5) \\ -\frac{\sqrt{x_2^2+3}}{(x_3-3)^2} & 0 & 2x_2x_3\ln(x_1+5 \end{pmatrix}$$

4) On a : $\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\,dx$

$f'(x) = x^2$ $g(x) = \ln x$	$f(x) = \frac{x^3}{3}$ $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$= \frac{2^3}{3}\ln 2 - \frac{1^3}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{8\ln 2}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}(2^3 - 1^3) = \frac{8\ln 2}{3} - \frac{7}{9}$$

Exercice 2 :

X\Y	[0;1[	[1;3[	[3;4[	Total
A	13	158	9	180
B	30	133	7	170
C	9	129	12	150
Total	52	420	28	500

1) On a : $n_{21} = 30$

$n_{2+} = 170$

$n_{+3} = 28$

2) On a : $f_{1+} = \dfrac{n_{1+}}{n_{++}} = \dfrac{180}{500} = 0,36$

$f_{+2} = \dfrac{n_{+2}}{n_{++}} = \dfrac{420}{500} = 0,84$

3) On a : $f_{X=A \mid Y \in [3;4[} = \dfrac{n_{13}}{n_{+3}} = \dfrac{9}{28} \simeq 0,32$

4) a) hypothèses

(H_0) X et Y sont indépendantes

(H_1) X et Y sont liées.

b) seuil

$\alpha = 0,05$

c) ddl

ddl $= (3-1)(3-1) = 4$

d) calcul des c_{ij}

$c_{ij} = \dfrac{n_{i+} \times n_{+j}}{n_{++}}$

X\Y	[0;1[	[1;3[	[3;4[	Total
A	18,72	151,2	10.08	180
B	17,68	142,8	9,52	170
C	15,6	126	8,4	150
total	52	420	28	500

e) calcul du χ^2_c

X\Y	[0;1[	[1;3[	[3;4]	Total
A	1,75	0,31	0,12	2,18
B	8,58	0,67	0,67	9,92
C	2,79	0,07	1,54	4,4
Total	13,12	1,05	2,33	16,5

formule : $\frac{(c_{ij} - n_{ij})^2}{c_{ij}}$

Donc $\chi^2_c = 16,5$

f) conclusion

On a alors : $\chi^2_{(0,05;4)} = 9,49 < 16,5 = \chi^2_c$

Donc on rejette (H_0) : X et Y sont liées.

Exercice 3 :

1) On a : $\sum x_i = 102,3 + \dots + 113,8 = 858,2$

$\sum y_i = 101,6 + \dots + 114,1 = 862,8$

$\sum x_i^2 = 102,3^2 + \dots + 113,8^2 = 92193,26$

$\sum y_i^2 = 101.6^2 + \dots + 114,1^2 = 93182,62^2$

$\sum x_i y_i = 102,3 \times 101,6 + \dots + 113,8 \times 114,1 = 92683,4$

2) on a $n = 8$ donc

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{8} = \frac{858,2}{8} = 107,275$

$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{8} = \frac{862,8}{8} = 107,85$

$V(x) = \frac{\sum x_i^2}{8} - \bar{x}^2 = \frac{92193,26}{8} - 107,275^2 = 16,232$

$V(y) = \frac{\sum y_i^2}{8} - \bar{y}^2 = \frac{93182,62}{8} - 107,85^2 = 16,205$

$$Cov(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{8} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{92683{,}4}{8} - 107{,}275 \times 107{,}85$$

$$= 15{,}816$$

3) On a : $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \dfrac{15{,}816}{\sqrt{16{,}232 \times 16{,}205}} = 0{,}975$

Comme r est proche de 1, la corrélation est forte et positive.

4) a) On a : $\hat{a} = \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)} = \dfrac{15{,}816}{16{,}232} = 0{,}974$

$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\,\bar{x} = 107{,}85 - 0{,}974 \times 107{,}275 = 3{,}364$

Donc la droite de regression linéaire a pour équation :

$\hat{y} = 0{,}974\,x + 3{,}364$

b) On a : $\hat{y}_{2014} = 0{,}974 \times 114{,}2 + 3{,}364 \simeq 114{,}6$

c) $\hat{y}_{2014}$ n'est qu'une estimation : la corrélation n'étant pas parfaite, il peut y avoir des écarts à la droite de regression linéaire

5) a) <u>hypothèses</u>

(H_0) absence de corrélation linéaire

(H_1) présence de corrélation linéaire

b) <u>seuil</u>

$\alpha = 0{,}05$

c) <u>ddl</u>

ddl $= 8 - 2 = 6$

d) calcul de T_c

On a : $T_c = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{0,975 \times \sqrt{8-2}}{\sqrt{1-0,975^2}} = 10,748$

e) conclusion

On a : $T_{(0,025;\ 6)} = 2,447 < 10,748 = T_c$

Donc on rejette (H_0) : il y a bien une corrélation linéaire significative.

6) On a : $\sigma(\hat{a}) = \dfrac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \times \sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{16,205}{16,232}} \times \sqrt{\dfrac{1-0,975^2}{8-2}}$

$= 0,118$

et $\sigma(\hat{b}) = \sigma(\hat{a}) \times \sqrt{\sigma(x)^2 + \bar{x}^2}$

$= 0,118 \times \sqrt{16,232 + 107,275^2}$

$= 12,667$

D'où $I_{\hat{a}} = [\hat{a} - \sigma(\hat{a}) \times T_{(0,025;6)}\ ;\ \hat{a} + \sigma(\hat{a})\, T_{(0,025;6)}]$

$= [0,974 - 0,118 \times 2,447\ ;\ 0,974 + 0,118 \times 2,447]$

$= [0,685\ ;\ 1,263]$

et $I_{\hat{b}} = [\hat{b} - \sigma(\hat{b}) \times T_{(0,025;6)}\ ;\ \hat{b} + \sigma(\hat{b})\, T_{(0,025;6)}]$

$= [3,364 - 12,667 \times 2,447\ ;\ 3,364 + 12,667 \times 2,447]$

$= [-27,632\ ;\ 34,36]$

7) a) <u>hypothèses</u>

(H_0) absence de corrélation linéaire

(H_1) présence de corrélation linéaire.

b) <u>seuil</u>

$\alpha = 0,05$

c) <u>ddl</u>

$ddl = (1, 8-2) = (1, 6)$

d) <u>calcul de Fc</u>

On a: $F_c = T_c^2 = 10,748^2 = 115,52$

e) <u>conclusion</u>

On a: $F_{(0,05;1;6)} = 5,987 < 115,52 = F_c$

Donc on rejette (H_0) : il y a bien une corrélation linéaire significative.