

EXAMEN DE MÉTHODES QUANTITATIVES 2

Durée : 2 heures

Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème est donné à titre indicatif. Des tables de lois statistiques sont disponibles à la fin de l'énoncé.

Exercice 1 - (8 points) Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Etudier la convexité de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $[1, +\infty[$.
 2. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction $g(x) = \sin(5x)$.
 3. Calculer la matrice jacobienne de la fonction h suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$h(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\sqrt{x_2^2 + 3}}{x_3 - 3}, e^{x_1 x_2 + 1}, x_2 x_3^2 \ln(x_1 + 5) \right).$$

4. En intégrant par parties, calculer $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.

Exercice 2 - (6 points) Pour trois modes de préparation d'un vaccin on mesure la réaction locale au point d'injection chez 500 patients. Le tableau suivant croise le type de préparation du vaccin (noté X , qui vaut A , B ou C) avec la taille en mm de la réaction locale au point d'injection (notée Y).

Préparation (X) Réaction (Y)	$[0;1[$	$[1;3[$	$[3;4[$
A	13	158	9
B	30	133	7
C	9	129	12

1. Donner n_{21} , n_{2+} et n_{+3} .
 2. Calculer f_{1+} et f_{+2} .
 3. Calculer $f_{X=A|Y \in [3;4[}$.
 4. Effectuer un test du khi2 au seuil de signification de 5%. Conclure sur la dépendance entre X et Y .

Exercice 3 - (8 points) Le tableau suivant présente l'évolution entre 2006 et 2013 d'un indice des prix à la consommation (IPC, noté X) et celle de l'indice du SMIC (noté Y). Ces indices sont en base 100 en 2005.

Année i	IPC x_i	SMIC y_i
2006	102.3	101.6
2007	102.0	103.6
2008	105.2	104.9
2009	106.0	108.2
2010	107.3	108.2
2011	109.4	109.8
2012	112.2	112.4
2013	113.8	114.1

1. On donne les valeurs suivantes :

$$\sum x_i = 858.2, \quad \sum x_i^2 = 92193.26,$$

/0.5

$$\sum y_i = 862.8, \quad \sum y_i^2 = 93182.62, \quad \sum x_i y_i = 92683.4$$

Justifier rapidement ces valeurs (qu'on pourra utiliser librement dans la suite).

/4.5

2. Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $Cov(x, y)$.

/0.5

3. Calculer le coefficient de corrélation r , et interpréter le résultat obtenu.

/1

4. (a) En utilisant la méthode MCO, calculer les coefficients $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de la droite de régression de Y selon x .

/0.5

(b) En 2014 l'indice IPC était de 114.2. Donner une estimation de l'indice du SMIC en 2014.

/0.5

(c) En réalité l'indice du SMIC en 2014 était de 114.1. Pourquoi l'estimation de la question (b) n'est-elle pas exacte ?

/1.5

5. Effectuer le test du coefficient de corrélation linéaire de Student au seuil de signification de 5 %.

/1

6. Calculer des intervalles de confiance de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ au seuil de signification de 5 %.

/1

7. Retrouver le résultat de la question 5 en effectuant un test de Fisher au seuil de signification de 5 %.

Annexe : tables de lois statistiques

Table du khi2

ddl \ t	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	10,83	7,88	6,64	5,02	3,84	2,71	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	13,82	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00
3	16,27	12,84	11,35	9,35	7,82	6,25	0,58	0,35	0,22	0,12	0,07	0,02
4	18,47	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,71	0,48	0,30	0,21	0,09
5	20,52	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	0,83	0,55	0,41	0,21
6	22,46	18,55	16,81	14,45	12,59	10,65	2,20	1,64	1,24	0,87	0,68	0,38
7	24,32	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	2,83	2,17	1,69	1,24	0,99	0,60
8	26,12	21,96	20,09	17,54	15,51	13,36	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34	0,86
9	27,88	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	4,17	3,33	2,70	2,09	1,74	1,15
10	29,59	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16	1,48
11	31,26	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	5,58	4,58	3,82	3,05	2,60	1,83
12	32,91	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07	2,21
13	34,53	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57	2,62
14	36,12	31,32	29,14	26,12	23,69	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66	4,08	3,04
15	37,70	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60	3,48
16	39,25	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14	3,94
17	40,79	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70	4,42
18	42,31	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	10,87	9,39	8,23	7,02	6,27	4,91
19	43,82	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84	5,41
20	45,31	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43	5,92
21	46,80	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03	6,45
22	48,27	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64	6,98
23	49,73	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26	7,53
24	51,18	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89	8,09
25	52,62	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52	8,65
26	54,05	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16	9,22
27	55,48	49,65	46,96	43,20	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81	9,80
28	56,89	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,57	12,46	10,39
29	58,30	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12	10,99
30	59,70	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79	11,59
31	61,10	55,00	52,19	48,23	44,99	41,42	21,43	19,28	17,54	15,66	14,46	12,20
32	62,49	56,33	53,49	49,48	46,19	42,59	22,27	20,07	18,29	16,36	15,13	12,81
33	63,87	57,65	54,78	50,73	47,40	43,75	23,11	20,87	19,05	17,07	15,82	13,43
34	65,25	58,96	56,06	51,97	48,60	44,90	23,95	21,66	19,81	17,79	16,50	14,06
35	66,62	60,28	57,34	53,20	49,80	46,06	24,80	22,47	20,57	18,51	17,19	14,69

Table de Student

ddl\proba	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	1,886	2,92	4,303	6,985	9,925	22,328
3	1,838	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,385	4,032	5,894
6	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93
13	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,646
18	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,08	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,5	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,45
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,385
60	1,296	1,671	2	2,39	2,66	3,232
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
120	1,289	1,658	1,98	2,358	2,617	3,16

Table de Fisher au seuil de 5%

n1 \ n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	60	120
1	161,446	18,513	10,128	7,709	6,608	5,987	5,591	5,318	5,117	4,965	4,543	4,351	4,242	4,171	4,001	3,920
2	199,499	19,000	9,552	6,944	5,786	5,143	4,737	4,459	4,256	4,103	3,682	3,493	3,385	3,316	3,150	3,072
3	215,707	19,164	8,277	6,591	5,409	4,757	4,347	4,066	3,863	3,708	3,287	3,098	2,991	2,922	2,758	2,680
4	224,583	19,247	9,117	6,388	5,192	4,534	4,120	3,838	3,633	3,478	3,056	2,866	2,759	2,690	2,525	2,447
5	230,160	19,296	9,013	6,256	5,050	4,387	3,972	3,688	3,482	3,326	2,901	2,711	2,603	2,534	2,368	2,290