Corrigé 2ème session

Exercice 1 :

1) On a : $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$

$$= \frac{1 \times 30 + 2.25 \times 225 + 2.75 \times 370 + 3.25 \times 305 + 4.75 \times 70}{1000}$$

$$= 2{,}878 \text{ kg}$$

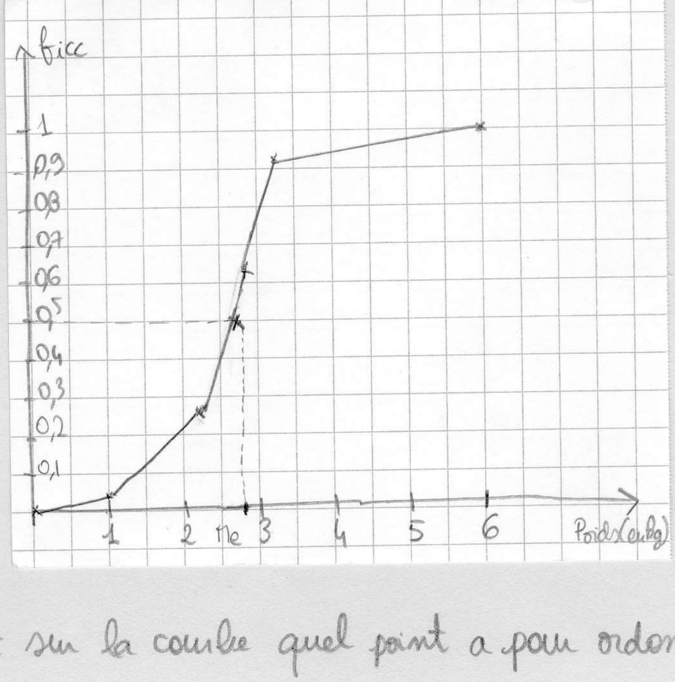
Donc le poids moyen à la naissance est de 2,878 kg.

2) On a :

Poids	n_i	x_i	f_i	f_{icc}	A_i	d_i	$n_i x_i$	q_i	q_{icc}	t_i
[0;2[	30	1	0,03	0,03	2000	0,015	30	0,01	0,01	0,00015
[2;2,5[	225	2,25	0,225	0,255	500	0,45	506,25	0,18	0,19	0,0225
[2,5;3[	370	2,75	0,37	0,625	500	0,74	1017,5	0,35	0,54	0,1305
[3;3,5[	305	3,25	0,305	0,93	500	0,61	991,25	0,34	0,88	0,21655
[3,5;6[	70	4,75	0,07	1	2500	0,028	332,5	0,12	1	0,0658
Total	1000	/	1	/	/	/	2877,5	1	/	0,4355

On rappelle que $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ et $f_{icc} = \sum_{j \leq i} f_j$

3)



En regardant sur la courbe quel point a pour ordonnée 0,5, on trouve

$Me \simeq 2{,}8$ kg

4) En lisant le tableau, on voit qu'il y a $225 + 370 + 305 = 900$ bébés ②
dont le poids est compris entre 2 kg et 3,5 kg soit 90% des bébés.

5) On commence par calculer les $d_i = \frac{n_i}{A_i}$ où A_i est l'amplitude de la classe.

La classe modale est donc la classe $[2{,}5 ; 3[$.

On a alors $M_o = \frac{(h-h_2)\,x_1 + (h-h_1)\,x_2}{(h-h_1)+(h-h_2)}$ avec $\begin{cases} h = 0{,}74 \\ h_1 = 0{,}45 \\ h_2 = 0{,}61 \\ x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$= \frac{(0{,}74-0{,}61)\times 2{,}5 + (0{,}74-0{,}45)\times 3}{(0{,}74-0{,}45)+(0{,}74-0{,}61)}$$

$$= 2{,}845 \text{ kg}.$$

6) On a : $V(x) = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

$$= \frac{1}{1000} \times (30\times 1^2 + 225\times 2{,}25^2 + 370\times 2{,}75^2 + 305\times 3{,}25^2 + 70\times 4{,}75^2) - 2{,}878^2$$

$$= 0{,}485$$

et $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 0{,}696$ kg

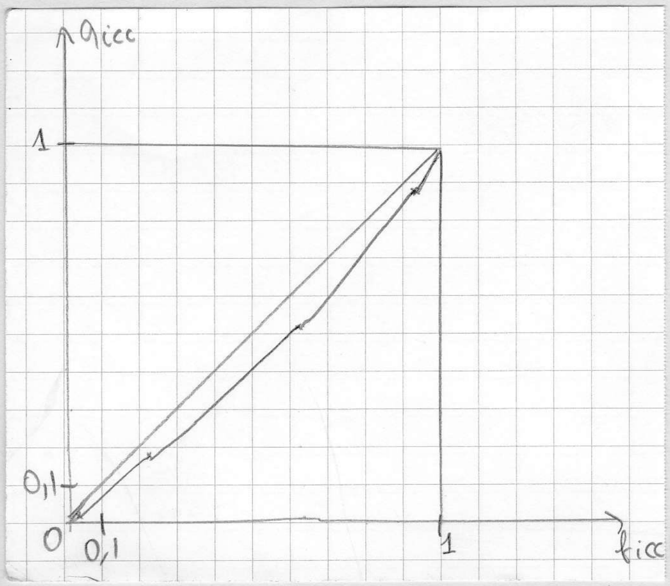
7) On sait que la médiane est dans la classe $[2{,}5 ; 3[$

car $f_{2cc} = 0{,}255 < 0{,}5$ et $f_{3cc} = 0{,}625 > 0{,}5$.

On a donc $M_e = \frac{(0{,}5-0{,}255)}{(0{,}625-0{,}255)} \times (3-2{,}5) + 2{,}5 = 2{,}831$ kg

8) On calcule les $q_i = \frac{n_i x_i}{m}$ où $m = \sum n_i x_i$ et $q_{icc} = \sum_{j \leq i} q_i$

Puis on trace la courbe de Lorentz qui relie les (f_{icc}, q_{icc})



9) On a alors : $I_G = \frac{0,5 - \sum A_i}{0,5} = \frac{0,5 - 0,4355}{0,5}$ où $A_i = (f_{icc} - f_{(i-1)cc}) \times \frac{(q_i + q_{(i-1)cc})}{2}$

$= 0,129$

Comme I_G est proche de 0, la concentration est faible donc la répartition est égalitaire.

10) La médiale se situe dans la classe [2,5 ; 3] car la moitié de la masse est atteinte dans cette classe $(0,19 < 0,5 < 0,54)$

On a alors : $Me = \frac{(0,5 - 0,19)}{(0,54 - 0,19)} \times (3 - 2,5) + 2,5$

$= 2,943$ kg

Les bébés ayant un poids de naissance inférieur à 2,943 kg constituent la moitié de la masse totale.

Exercice 2 :

1) On a :

x	$-\infty$	-3		2		$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x-2}$	$+$		$-$	$\|\|$	$+$	

Donc $E = [-3;2[$

Ainsi, $\min E = \inf = -3$

$\max E$ n'existe pas et $\sup E = 2$.

2) On a : $2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$

$x = \frac{-1 \pm 7}{2 \times 2} = -2$ ou $\frac{3}{2}$

donc $2x^2 + x - 6 = 2(x+2)(x - \frac{3}{2})$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2$ ou 1

donc $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

D'où $g(x) = \frac{2\cancel{(x+2)}(x-3/2)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \frac{2x-3}{x-1}$

Ainsi, en $\pm\infty$, $g(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \frac{(2 - 3/x)}{(1 - 1/x)}$

$\longrightarrow \frac{2-0}{1-0} = 2$

donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 2$.

en $x \to -2$, $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \frac{2 \times 2 - 3}{2 - 1} = 1$

en $x \to 1$, on a : $2x-3 \xrightarrow[x\to 1]{} 2\times 1-3=-1<0$

donc $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

et $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

3) On a quand $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2-x-2} - \sqrt{x^2+x+2} = \frac{(x^2-x-2)-(x^2+x+2)}{\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+x+2}}$$ par quantité conjuguée

$$= \frac{\cancel{x^2}-x-2-\cancel{x^2}-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$= \frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$= \frac{\cancel{x}(-2-4/x)}{\cancel{x}(\sqrt{1-1/x-2/x^2}+\sqrt{1+1/x+2/x^2})}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{1+0+0}} = -1$$

4) a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ car $x \neq 0$

b) On a : $\frac{1}{x^2} e^{1/x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{+\infty} \times e^{-\frac{1}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0$

$\frac{1}{x^2} e^{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{+\infty} \times e^{\frac{1}{+\infty}} = 0 \times e^0 = 0$

$\frac{1}{x^2} e^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{0^+} \times e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty \times e^{+\infty} = +\infty$

On sait que $\lim_{y\to+\infty} y^2 e^{-y} = 0$ par croissance comparée,

donc $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} e^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} y^2 e^{-y} = 0$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$

(c) On a : $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} e^{1/x}\right)'$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{1/x} + \frac{1}{x^2}\left(e^{1/x}\right)'$$

$$= -\frac{2}{x^3} e^{1/x} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)' e^{1/x}$$

$$= -\frac{2}{x^3} e^{1/x} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x}$$

$$= -\frac{1}{x^3}\left(2 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$$

(d)

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$2+\frac{1}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f	0	↘	$4e^{-2}$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	0

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(-1/2)^2} \times e^{1/(-1/2)} = 4e^{-2}$$

On a donc une asymptote verticale en $x=0$ et une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $\pm\infty$.

(e) Comme f est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues, que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty > 2$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 < 2$, et que f est strictement ↘ sur $]0;+\infty[$, il existe un unique $\alpha > 0$ tq $f(\alpha) = 2$ par le thm des valeurs intermédiaires.

Or, $f(1) = 2{,}7 > 2$ et $f(2) = 0{,}4 < 2$ donc $1 < \alpha < 2$.