# Corrigé de l'examen

## Exercice 1:

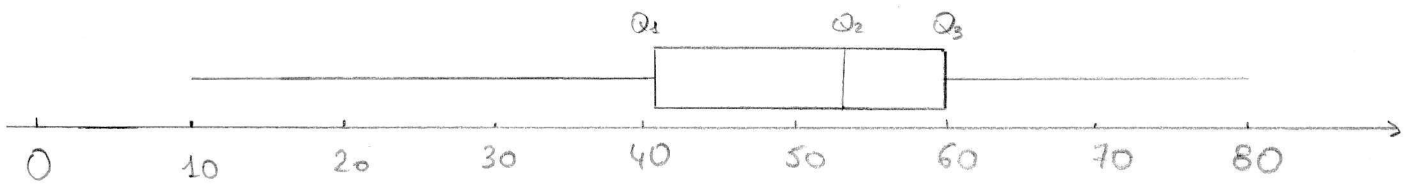
1) $EIQ = Q_3 - Q_1 = 60 - 40 = 20$

$Q_1 - 1.5\,EIQ = 40 - 1.5 \times 20 = 10$

$Q_3 + 1.5\,EIQ = 60 + 1.5 \times 20 = 90$

Donc comme $0 < Q_1 - 1.5\,EIQ$, on coupe la moustache de gauche à 10.

et comme $80 \leq Q_3 + 1.5\,EIQ$, on ne coupe pas la moustache de droite.




2) On a : $C_Y = \dfrac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \dfrac{60 + 40 - 2 \times 55}{60 - 40} = \dfrac{-10}{20} = -0.5$

Comme $C_Y < 0$, la distribution est asymétrique, étalée à gauche.

## Exercice 2:

1) On résoud d'abord $x^2 - 3x - 3 = 1 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$

donc $x = \dfrac{3 \pm 5}{2 \times 1} = 4$ ou $(-1)$

d'où $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$.

Ainsi, on a :

| $x$ | | $-1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $-$ |
| $x^2-3x-4$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Donc $x^2-3x-3<1$ pour $x \in ]-1,4[$.

D'où $E = ]-1,4[$.

Donc min E et max E n'existent pas car E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Mais $\inf E = -1$ et $\sup E = 4$.

2) • en $\pm\infty$ : $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} = \dfrac{\cancel{x^2}(1-1/x-6/x^2)}{\cancel{x^2}(1-2/x-3/x^2)}$

$$\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1-0-0}{1-0-0} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

• en $-1$ : on a : $\left.\begin{array}{l}(-1)^2-2\times(-1)-3=0 \\ \text{et } (-1)^2-(-1)-6=-6\neq 0\end{array}\right\}$ donc c'est une forme indéterminée de la forme "$\dfrac{1}{0}$"

On factorise $x^2-2x-3$ : $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-3) = 16 = 4^2$

donc $x = \dfrac{2\pm4}{2} = 3$ ou $-1$.

D'où $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$

Finalement, $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{1}{(x+1)} \times \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

On a : $\dfrac{x^2-x-6}{x-3} \xrightarrow[x\to-1]{} \dfrac{(-1)^2-(-1)-6}{-1-3} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2} > 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-}\times\dfrac{3}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+}\times\dfrac{3}{2} = +\infty$.

• en 3 : on a : $3^2 - 3 - 6 = 0$ donc c'est une forme indéterminée de la forme "$\frac{0}{0}$".

On factorise $x^2 - x - 6$ : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$

donc $x = \frac{1 \pm 5}{2} = 3$ ou $-2$

D'où $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

Finalement, $f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \frac{x+2}{x+1} \xrightarrow[x \to 3]{} \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$

Donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{5}{4}$

3) On a en $+\infty$ : $\sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$ (quantité conjuguée)

$$= \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(1 + 1/x)}{\cancel{x}(\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1)}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \frac{1}{2}$

4) Commençons par étudier la continuité sur $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\sqrt{1+x}) = 0 \times \sqrt{1+0} = 0 = g(0)$

Donc $g$ est continue en $0$.

$x \mapsto x\sqrt{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc finalement $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Etudions maintenant sa dérivabilité :

$x \mapsto x\sqrt{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

En $0^+$, on a :
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{1+x}-0}{x-0}$$
$$= \frac{\cancel{x}\sqrt{1+x}}{\cancel{x}}$$
$$= \sqrt{1+x}$$
$$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \sqrt{1+0} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0 \neq 1$.

Donc $g$ n'est pas dérivable en $0$.

Finalement $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

5) On a $D_h = ]-1/2\,; +\infty[$ car $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$
et $1+2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Calculons maintenant sa dérivée : $h = u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln(1+2x). \end{cases}$

On a : $u'(x) = 1$.

et $v = a \circ b$ avec $\begin{cases} a(x) = \ln x \\ b(x) = 1+2x \end{cases}$ donc $\begin{cases} a'(x) = \frac{1}{x} \\ b'(x) = 2 \end{cases}$

D'où $v'(x) = b'(x) \times a'(b(x))$
$$= \frac{2}{1+2x}$$

Ainsi $h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \ln(1+2x) + x \times \frac{2}{1+2x}$
$$= \ln(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}.$$

Exercice 3:

1) (a) $D_g = \mathbb{R}$ car exp est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : en $+\infty$ : $g(x) = e^x - x$

$$= e^x(1 - x/e^x)$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \times (1-0) = +\infty$$ par croissance comparée.

en $-\infty$ : $g(x) = e^x - x$

$$\xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 - (-\infty) = +\infty.$$

(b) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

on a : $g'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$.

(c) on a :

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | $+\infty \searrow$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ |

car $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$

et $g(0) = 1 - 0 = 1$.

(d) Sur $]-\infty, 0]$, $g$ est décroissante et $g(0) = 1$ donc $g(x) \geq 1$.
Sur $[0; +\infty[$, $g$ est croissante et $g(0) = 1$ donc $g(x) \geq 1$

Finalement, $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) (a) $D_f = \mathbb{R}^*$ car $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1$
$\Leftrightarrow x \neq 0$

(b) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{-1} = 1$ car $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissance comparée

en $+\infty$ : $f(x) = \dfrac{xe^x(1 - 1/xe^x)}{e^x(1 - 1/e^x)} = \dfrac{x\,(1 - 1/xe^x)}{(1 - 1/e^x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

en 0 : $\quad xe^{x}-1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1<0$

donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} \times (-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} \times (-1) = -\infty$

(c) On a : $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = xe^{x}-1 \\ v(x) = e^{x}-1. \end{cases}$

et $u = a\times b - 1$ avec $\begin{cases} a(x) = x \\ b(x) = e^{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} a'(x) = 1 \\ b'(x) = e^{x} \end{cases}$

d'où $u'(x) = a'(x)\,b(x) + a(x)\,b'(x)$

$= 1\times e^{x} + x\times e^{x} = (x+1)e^{x}$

et $v'(x) = e^{x}$

finalement, $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$

$= \dfrac{(x+1)e^{x}\times(e^{x}-1) - (xe^{x}-1)\,e^{x}}{(e^{x}-1)^2}$

$= \dfrac{e^{x}\left((x+1)e^{x} - (x+1) - xe^{x}+1\right)}{(e^{x}-1)^2}$

$= \dfrac{e^{x}(e^{x}-x)}{(e^{x}-1)^2}$

(d) $f'$ et $g$ sont du même signe car $e^{x}>0$ et $(e^{x}-1)^2>0$ sur $\mathbb{R}^*$.

donc $f'$ est positif.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $f$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Donc $f$ possède une asymptote verticale en $x=0$

et une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=1$.

(e) Calculons d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ :

on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 1/x}{e^x - 1} = \frac{\cancel{e^x}\,(1-1/xe^x)}{\cancel{e^x}\,(1-1/e^x)}$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 1\times x\right)$ :

on a : $f(x) - x = \frac{(xe^x - 1) - x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{x-1}{e^x - 1}$

$$= \frac{x\,(1-1/x)}{e^x\,(1-1/x)}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$ par croissance comparée.

Donc $f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 1\times x + 0$
$= x$.

(f) Comme $f$ est continue, strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty < 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0 \end{cases}$

on sait par le thm de la bijection que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.