

EXAMEN

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Barème indicatif :

Exercice 1 : 4 points

Exercice 2 : 10 points

Exercice 3 : 8 points

(14)

Exercice 1 - Lors d'une fête de village, on a recensé l'âge des participants, compris entre 0 et 80 ans.

$$\text{On donne : } \begin{cases} Q_1 = 40 \\ Q_2 = 55 \\ Q_3 = 60 \end{cases}$$

- /2 1. Représenter la boîte à moustaches en expliquant votre schéma.
/2 2. Calculer le coefficient de Yule et interpréter votre résultat.

(10)

Exercice 2 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

- /2 1. Posons $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x^2 - 3x - 3 < 1\}$. Déterminer, si ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de E dans \mathbb{R} .
/2 2. Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -1 , 3 et $+\infty$.
/2 3. Calculer la limite de $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$ quand x tend vers $+\infty$.
/2 4. Notons g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x\sqrt{1+x}$ si $x > 0$, et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$. Etudier la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de la fonction g .
/2 5. Posons $h(x) = x \ln(1 + 2x)$. Déterminer l'ensemble de définition de h et calculer sa dérivée.

Exercice 3 au verso

18

Exercice 3 - Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x - 1}.$$

1. Dans cette question, on étudie la fonction auxiliaire g définie par

$$g(x) = e^x - x.$$

10.5 (a) Déterminer l'ensemble de définition de g , et calculer les limites de $g(x)$ aux bornes de cet ensemble.

10.5 (b) Calculer la dérivée de g .

10.5 (c) Dresser le tableau de variation de g .

10.5 (d) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On revient maintenant à la fonction f définie au début de l'exercice.

10.5 (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

11.5 (b) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

11 (c) Calculer la dérivée de f .

11 (d) En utilisant la question 1.d, dresser le tableau de variation de f et préciser les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

11 (e) Démontrer que le graphe de f a une asymptote oblique en $+\infty$, et en donner une équation.

11 (f) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ avec $x > 0$?