

EXAMEN D'ANALYSE 2 – DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

19

**Exercice 1** - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Considérons la suite  $(u_n)$  définie par la relation  $u_{n+1} = u_n - 3$  avec  $u_0 \in \mathbb{R}$ .
  - 1.5 (a) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$  on a  $u_n = u_0 - 3n$ .
  - 10.5 (b) En déduire la limite de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
1. Déterminer si la série  $\sum \frac{(-2)^n}{n^5}$  est convergente ou divergente.
1. En intégrant par parties, calculer  $\int_0^{\pi/2} (3x - 1) \cos(2x) dx$ .
4. En utilisant la formule de changement de variable, calculer les intégrales suivantes :
  1. (a)  $\int_0^2 \frac{4t}{\sqrt{2t^2+1}} dt$ .
  - 1.5 (b)  $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^{-x}-1}$ , en posant  $x = \ln(1+t)$ .
5. Calculer la matrice jacobienne de la fonction  $f$  suivante (en précisant son ensemble de définition) :

12.5 
$$f(x_1, x_2, x_3) = \left( (x_1 + x_2)^3 \ln(3 - x_3), \frac{(\cos x_1) e^{2x_3}}{x_2^2} \right).$$

11

**Exercice 2** -

Partie A

Considérons la fonction  $g$  définie par

$$g(x, y) = 11x^2 + 2xy + 9y^2.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $g$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}$ .
2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de  $g$ .
3. Déterminer  $a, b \in \mathbb{Z}$  pour qu'on ait
 
$$g(x, y) = (ax + y)^2 + 2(x + by)^2.$$
4. En déduire la nature du (ou des) point(s) critique(s) de  $g$  déterminé(s) à la question 2.

Partie B

Dans la suite de ce problème on pose

$$f(x, y) = 2 - \sqrt{11x^2 + 2xy + 9y^2 + 1}.$$

- 10.5 5. A l'aide de la question A.3, déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 12 6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 1.5 7. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de  $f$ ; quelle est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?
- 13 8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .