Corrigé du partiel d'Analyse 2

Exercice 1

1) On pose (H_n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, $n \geq 0$

initialisation: pour $n=0$, on a:

$$\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2\times 0+1 = 1$$

et $(0+1)^2 = 1$

donc (H_0) est vraie !

hérédité: Soit $n \geq 0$. On suppose (H_n) vraie. Montrons (H_{n+1}).

On a:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1)$$

$= (n+1)^2 + 2n+3$ par hypothèse de récurrence

$= n^2+2n+1+2n+3$

$= n^2+4n+4$

$= (n+2)^2$

$= ((n+1)+1)^2$

Donc (H_{n+1}) est vraie

Finalement, (H_n) est vraie pour $n \geq 0$.

2) (a) On a quand $n \to +\infty$:

$$u_n = \frac{n^2+22n+17}{n^2+32} = \frac{n^2(1+22/n+17/n^2)}{n^2(1+32/n)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

Donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(b) On a quand $n \to +\infty$ que $q^n \to 0$ quand $|q|<1$.

Donc $\left(-\frac{1}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^n - 3\right) = 0-3 = -3$

Donc (u_n) converge vers -3.

3) (a) On pose $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. On a bien $u_n \neq 0$.

On calcule : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \times \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 > 1$$

Donc par le critère de d'Alembert $\sum \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$ diverge

(b) On pose $v_n = n^4 e^{-n}$. On a bien $v_n \neq 0$.

On calcule : $$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)}}{n^4 e^{-n}} = \frac{(n+1)^4}{n^4} \times \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \times e^{-1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Donc par le critère de d'Alembert, $\sum n^4 e^{-n}$ est convergente

4) On rappelle d'abord la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

On a : $$\int_0^{\pi/4} x\sin(2x)\,dx = \left[x\times\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 1\times\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)dx$$

$f(x) = x$ $g'(x) = \sin(2x)$
$f'(x) = 1$ $g(x) = -\cos(2x)/2$

$$= -\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{0}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

5) On rappelle d'abord la formule de changement de variable (sens 1)

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt \text{ en posant } t = u(x).$$

On a : $\displaystyle\int_0^1 8x(x^2+3)^3\,dx = \int_0^1 4x(2x)\times(x^2+3)^3\,dx$

$u(x)=x^2+3$ $u'(x)=2x$ $f(u)=u^3$	$a=0$ $b=1$ $u(a)=0^2+3=3$ $u(b)=1^2+3=4$

$$= \int_0^1 4\,u'(x)\times(u(x))^3\,dx$$

$$= 4\int_3^4 t^3\,dt$$

$$= 4\left[\frac{t^4}{4}\right]_3^4$$

$$= 4^4-3^4 = 256-81=175$$

6) (a) Soit $0<\varepsilon<1$. On a :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_\varepsilon^1 \qquad \left(\text{car } \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{(-3+1)} = \frac{x^{-2}}{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ est divergente

(b) Soit $n>1$. On sait que $0\leq\cos^2 x\leq 1$ d'où $0\leq\dfrac{\cos^2 x}{x^3}\leq\dfrac{1}{x^3}$

Donc $\displaystyle 0\leq\int_1^n \frac{\cos^2 x}{x^3}\,dx \leq \int_1^n \frac{dx}{x^3}$

$$\leq \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^n$$

$$\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

$$\leq \frac{1}{2}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^3}\,dx$ est convergente

Exercice 2 :

1) On a : $x+\sqrt{x^2+1} = x+\sqrt{x^2+1} \times \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}$ car $x-\sqrt{x^2+1} \neq 0$

$$= \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

2) On sait que la fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$.

Si $x \geq 0$, $x+\sqrt{x^2+1} \geq 1$ donc $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est bien définie.

Si $x \leq 0$, $x+\sqrt{x^2+1} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ par 1) et $x-\sqrt{x^2+1} \leq -1$

donc $\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} \geq 1$ et donc $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est bien définie.

Finalement, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3) (a) g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues et dérivables.

On a : $g(x) = u \circ v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2+1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

D'où $g'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

$$= 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(b) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues et dérivables.

On a : $f(x) = u \circ v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ par 3)(a)} \end{cases}$

D'où $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}}{\cancel{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

4) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \infty + \infty = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

De même, par 1), on a : $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \dfrac{-1}{-\infty - \infty} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

5)

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d'après 3)(b) et 4)

7

6) On a par 3)(b) que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int_0^1 f'(t)\,dt$

$$= \left[f(t) \right]_0^1$$

$$= f(1) - f(0)$$

$$= \ln(1+\sqrt{1^2+1}) - \ln(0+\sqrt{0^2+1})$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

7) On rappelle la formule de changement de variable ("sens 2") :

pour u bijective tq $u'(x) \neq 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'(t)\,dt \quad \text{en posant } x = u(t)$$

Or si $u(t) = e^t$, on a : $u'(t) = e^t > 0$

donc $u \nearrow$ strictement donc u bijective et $u'(t) \neq 0$.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)^2}} = \int_0^1 \frac{e^t\,dt}{e^t\sqrt{1+\ln(e^t)^2}}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)^2}}$	$a = 1$
$u(t) = e^t$	$b = e$
$u'(t) = e^t$	$u^{-1}(a) = \ln 1 = 0$
$u^{-1}(t) = \ln t$	$u^{-1}(b) = \ln e = 1$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) \quad \text{par 6)}$$