

PARTIEL D'ANALYSE 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

12

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a

12

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2.$$

2. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, dire si elle converge et si oui déterminer sa limite :

$$(a) u_n = \frac{n^2 + 22n + 17}{n^2 + 32} \quad (b) u_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n - 3$$

1+1

3. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente :

$$(a) \sum \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad (b) \sum n^4 e^{-n}$$

1+1

12

12

4. En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\pi/4} x \sin(2x) dx$.

5. En utilisant la formule de changement de variable, calculer $\int_0^1 8x(x^2 + 3)^3 dx$.

6. Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non (sans les calculer) :

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^3} dx$$

1+1

18

Exercice 2 - Dans cet exercice on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1. Démontrer que pour tout réel x on a

11

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

0.5

2. Démontrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

11

- (a) Calculer la dérivée de g .

- (b) En déduire que

11

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

0.5+0.5

4. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et quand x tend vers $-\infty$ (on pourra utiliser la question 1 pour traiter la limite en $-\infty$).

0.5

5. Dresser le tableau de variation de f .

11

6. En utilisant la question 3(b), calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

12

7. En utilisant la formule de changement de variable avec $x = e^t$, en déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1 + (\ln x)^2}} dx.$$