Corrigé de l'examen d'Analyse 2

Exercice 1:

1) a) On pose (H_n) $\quad u_n = \frac{u_0}{2^n}, \quad n \geq 0$

initialisation: $n=0$

On a: $u_0 = \frac{u_0}{2^0} = \frac{u_0}{1} = u_0$ vrai !

Donc (H_0) est vraie

hérédité: soit $n \geq 0$. On suppose que (H_n) est vraie. Montrons (H_{n+1}).

On a: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ par définition

$= \left(\frac{u_0}{2^n}\right) \times \frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{u_0}{2^{n+1}}$

Donc (H_{n+1}) est vraie !

Finalement, (H_n) est vraie $\forall n \geq 0$.

b) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ car $u_n = \frac{u_0}{2^n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

2) On pose $u_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n} > 0$ pour $n > 0$.

On a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}}$

$= \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3} < 1$

Donc par le critère de d'Alembert, $\sum \frac{\sqrt{n}}{3^n}$ est convergente.

3) On rappelle : $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$

On a :

$f'(x) = 2x$
$g(x) = \ln(2x)$

$f(x) = x^2$
$g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_{1/2}^{1} 2x\ln(2x)\,dx = \left[x^2\ln(2x)\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} x^2 \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1^2\ln(2\times 1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2\ln\left(2\times\frac{1}{2}\right) - \int_{1/2}^{1} x\,dx$$

$$= \ln 2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= \ln 2 - \frac{3}{8}$$

4) a) On rappelle : $\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx$

On a :

$u(t) = \ln t$
$u'(t) = 1/t$
$f(x) = x^2$

$a = 1$	$u(a) = \ln 1 = 0$
$b = e$	$u(b) = \ln e = 1$

$$\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}\,dt = \int_1^e (u(t))^2 \times u'(t)\,dt$$

$$= \int_1^e f(u(t))\,u'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

b) On rappelle : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'(t)\,dt$ avec $\begin{cases} u \text{ bijective} \\ u' \neq 0 \end{cases}$

On a :

$u(t) = \frac{t^2-3}{2}$
$u'(t) = t > 0$ sur $t \in [1,3]$ donc u bij
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+3}}$
$u^{-1}(-1) = 1$
$u^{-1}(3) = 3$

$$\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+3}} = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-3}{2}}{\sqrt{2\times\left(\frac{t^2-3}{2}\right)+3}} \times t\,dt$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{t^2-3}{2}\right) \times \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{t^2}}}\,dt$$

$$= \int_1^3 \frac{t^2-3}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - 3t\right]_1^3 = \frac{1}{2}\times\left(0 - \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right) = \frac{4}{3}$$

5) On a : $f(x_1,x_2,x_3) = \left(e^{-x_1}\sqrt{x_2}\sin(x_3), \dfrac{\ln(1+x_2)\,x_3^2}{x_1} \right)$

On pose $f_1(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_1}\sqrt{x_2}\sin(x_3)$

$f_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{\ln(1+x_2)\,x_3^2}{x_1}$

$D_{f_1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ car $\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$

$D_{f_2} = \mathbb{R}^* \times]-1;+\infty[\times \mathbb{R}$ car $\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ définie sur } \mathbb{R}^* \\ \ln(1+x) \text{ définie sur }]-1;+\infty[\end{cases}$

Donc $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ car $\begin{cases} x_1 \neq 0 \quad (D_{f_2}) \\ x_2 \geq 0 \text{ et } x_2 > -1 \quad (D_{f_1} \text{ et } D_{f_2}) \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

On a : $\text{Jac} f = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_1 \\ \partial f_1/\partial x_2 & \partial f_2/\partial x_2 \\ \partial f_1/\partial x_3 & \partial f_2/\partial x_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -e^{-x_1}\sqrt{x_2}\sin(x_3) & -\ln(1+x_2)\,x_3^2/x_1^2 \\ e^{-x_1}\sin(x_3)/(2\sqrt{x_2}) & x_3^2/(x_1(1+x_2)) \\ e^{-x_1}\sqrt{x_2}\cos(x_3) & 2\ln(1+x_2)\,x_3/x_1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

A) 1) On a : $g(x,y) = 5x^2 + 2xy + 2y^2$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 10x + 2y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2x + 4y \end{cases}$

2) Ainsi $\text{grad}\, g = \begin{pmatrix} \partial g/\partial x \\ \partial g/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$

On a : $\operatorname{grad} g = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}y \\ x = 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 0$

Donc g a un unique point critique : c'est $(0,0)$

3) On procède par identification :

$(ax+y)^2 + (bx+y)^2 = a^2x^2 + y^2 + 2axy + b^2x^2 + y^2 + 2bxy$

$= (a^2+b^2)x^2 + 2y^2 + 2(a+b)xy$

Donc $g(x,y) = (ax+y)^2 + (bx+y)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-b)^2 + b^2 = 5 \\ a = (1-b) \end{cases}$

$(1-b)^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow 1 - 2b + b^2 + b^2 = 5$

$\Leftrightarrow 2b^2 - 2b - 4 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 - b - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2$

$b = \frac{1 \pm 3}{2} = 2$ ou -1

On suppose par exemple $b = 2$ d'où $a = 1 - b = -1$ (sinon $b = -1$ et $a = 2$)

Finalement, $g(x,y) = (-x+y)^2 + (2x+y)^2$

4) Comme $g(x,y) \geq 0$ par A.3) et $g(0,0) = 0$, $(0,0)$ est un minimum

B) 5) On remarque que $f(x,y) = \ln(1+g(x,y))$

et par A) 3), on sait que $g(x,y) \geq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^2$.

6) On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{10x+2y}{1+5x^2+2xy+2y^2}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x+4y}{1+5x^2+2xy+2y^2}$

7) On en déduit : $\text{grad}\, f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10x+2y)/(1+5x^2+2xy+2y^2) \\ (2x+4y)/(1+5x^2+2xy+2y^2) \end{pmatrix}$

On a alors : $\text{grad}\, f = 0 \iff \begin{cases} 10x+2y = 0 \\ 2x+4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{5}y \\ x = 2y \end{cases}$

$\iff x = y = 0$

Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.

Comme la fonction $\ln$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

que $1+g(x,y) \geq 1+g(0,0) = 1$ (par A) 4)) alors $f(x,y) = \ln(1+g(x,y))$
$\geq \ln(1+g(0,0))$
$\geq f(0,0)$

Donc $(0,0)$ est un minimum.

8). $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{10x+2y}{1+5x^2+2xy+2y^2}\right)$

$= \dfrac{10 \times (1+5x^2+2xy+2y^2) - (10x+2y) \times (10x+2y)}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$

$= \dfrac{10 + 50x^2 + 20xy + 20y^2 - 100x^2 - 40xy - 4y^2}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-50x^2 - 20xy + 16y^2 + 10}{(1 + 5x^2 + 2xy + 2y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+4y}{1+5x^2+2xy+2y^2}\right)$$

$$= \frac{4 \times (1+5x^2+2xy+2y^2) - (2x+4y)(2x+4y)}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

$$= \frac{4 + 20x^2 + 8xy + 8y^2 - 4x^2 - 16y^2 - 16xy}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

$$= \frac{16x^2 - 8xy - 8y^2 + 4}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{10x+2y}{1+5x^2+2xy+2y^2}\right)$$

$$= \frac{2 \times (1+5x^2+2xy+2y^2) - (10x+2y)(2x+4y)}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

$$= \frac{2 + 10x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x^2 - 40xy - 4xy - 8y^2}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

$$= \frac{-10x^2 - 40xy - 4y^2 + 2}{(1+5x^2+2xy+2y^2)^2}$$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ par le thm de Schwarz