Univ. Paris VIII, 2013-2014

# Examen d'Analyse 2

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.*

/9

**Exercice 1 -** Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Considérons la suite $(u_n)$ définie par la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

/1.5 (*a*) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = \frac{u_0}{2^n}$.

/0.5 (*b*) En déduire la limite de $u_n$ quand $n \to +\infty$.

/1 2. Déterminer si la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{3^n}$ est convergente ou divergente.

/1 3. En intégrant par parties, calculer $\int_{1/2}^{1} 2x\ln(2x)dx$.

4. En utilisant la formule de changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

/1 (*a*) $\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}dt$.

/1.5 (*b*) $\int_{-1}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{2x+3}}$, en posant $x = \frac{t^2-3}{2}$.

5. Calculer la matrice jacobienne de la fonction $f$ suivante (en précisant son ensemble de définition) :

/2.5

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(e^{-x_1}\sqrt{x_2}\sin(x_3) \;,\; \frac{\ln(1+x_2)x_3^2}{x_1}\right).$$

/11

**Exercice 2 -**

*Partie A*

Considérons la fonction $g$ définie par

$$g(x,y) = 5x^2 + 2xy + 2y^2.$$

/1 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $g$, c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

/1 2. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de $g$.

3. Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ pour qu'on ait

/1.5

$$g(x,y) = (ax+y)^2 + (bx+y)^2.$$

/1 4. En déduire la nature du (ou des) point(s) critique(s) de $g$ déterminé(s) à la question 2.

*Partie B*

Dans la suite de ce problème on pose

$$f(x,y) = \ln(1 + 5x^2 + 2xy + 2y^2).$$

/0.5 5. A l'aide de la question A.3, déterminer l'ensemble de définition de $f$.

/2 6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

/1 7. En déduire le gradient et le(s) point(s) critique(s) de $f$ ; quelle est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?

/3 8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.