Univ. Paris VIII, 2013-2014

Examen d'Analyse 1 – Deuxième Session

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/8 **Exercice 1 -**

/2 1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -4, 1, $+\infty$, où $f(x) = \frac{3x^2-15x+12}{2x^2+6x-8}$.

/2 2. Trouver les extrema éventuels de la fonction $g(x) = (2x+1)^2(4x-3)$ et en déterminer la nature.

/2 3. Etudier la convexité de la fonction $h(x) = \ln(e^{-3x}+2)$ sur $\mathbb{R}$.

/2 4. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction $j(x) = \sqrt{2x+1}$.

/14 **Exercice 2 -**

/4 *Partie A* Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

/1 1. Etudier le sens de variation de f.

/1 2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

/1 3. Dresser le tableau de variation de f.

/1 4. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

Partie B On considère maintenant la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

/7

$$g(x) = x\ln(x+2) - x\ln(x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0, \text{ et } g(0) = \tfrac{1}{2}.$$

/1 1. Démontrer que g est continue en 0.

/1.5 2. Démontrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, et en déduire le tableau de variation de g.

/1.5 3. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $h \mapsto \ln(1+2h)$, et en déduire $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+2h)}{h}$.

/1.5 4. Démontrer que $\ln(x+2) - \ln(x) = \ln(1+\frac{2}{x})$, et en déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

/1.5 5. Démontrer que la courbe représentative de g admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

/3 *Partie C* Dans cette partie on note $h(x) = g(x) - x$ pour tout $x \geq 0$.

/1 1. Démontrer que pour tout $x \in [2,3]$ on a $f(x) < \frac{1}{2}$, et en déduire que $h'(x) < 0$.

/1 2. En déduire le tableau de variation de h.

/1 3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2,3]$.