Corrigé du partiel

Exercice 1

1) $|x-3|<2 \iff -2<x-3<2$

$\iff 1<x<5$

$\iff x\in]1,5[$.

Donc $E =]1,5[$.

$\min(E)$ et $\max(E)$ n'existent pas car l'intervalle est ouvert.

$\inf(E) = 1$, $\sup(E) = 5$.

2) $f(x) = \dfrac{x^2-3x-10}{x^2+6x+8}$

On commence par factoriser.

- $x^2-3x-10=0$

  $\Delta = (-3)^2 - 4\times(-10)\times 1 = 49 = 7^2$

  $x = \dfrac{3\pm 7}{2\times 1} = 5$ ou -2

  donc $x^2-3x-10 = (x-5)(x+2)$

- $x^2+6x+8=0$

  $\Delta = 6^2 - 4\times 8\times 1 = 4 = 2^2$

  $x = \dfrac{-6\pm 2}{2\times 1} = -4$ ou -2

  donc $x^2+6x+8 = (x+4)(x+2)$

D'où $f(x) = \dfrac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{(x+4)\cancel{(x+2)}} = \dfrac{x-5}{x+4}$

- en $\pm\infty$, $f(x) = \frac{x-5}{x+4} = \frac{\cancel{x}(1-5/x)}{\cancel{x}(1+4/x)}$

$$\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

- en -2 : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x-5}{x+4} = \frac{-2-5}{-2+4} = -\frac{7}{2}$

- en -4 : $x-5 \xrightarrow[x\to -4]{} -4-5 = -9 < 0$

donc $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \frac{-9}{0^-} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \frac{-9}{0^+} = -\infty$

3) Quand $x \to +\infty$, on a :

$$\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{x^2+2x} = \frac{(x^2-x+3)-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{-3x+3}{\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{\cancel{x}\,(-3+3/x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-1/x+3/x^2}+\sqrt{1+2/x}\right)}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{-3+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{3}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{x^2+2x} = -\frac{3}{2}$

4) On sait que sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, g est continue et dérivable comme composée de fonctions continues et dérivables sur ces intervalles.

× On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^x = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ d'où la continuité de g en 0.

× On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^x - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

donc g n'est pas dérivable en 0.

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable sur $\mathbb{R}^*$ uniquement

5) $D_h = \mathbb{R}^*$

on a : $h = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

× $u(x) = a \circ b(x)$ avec $\begin{cases} a(x) = \sqrt{x} \\ b(x) = 1+x^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} a'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \\ b'(x) = 2x \end{cases}$

donc $u'(x) = b'(x) \times a'(b(x))$

$= \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

× $v'(x) = 1$

donc $h'(x) = \left(\dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times x - \sqrt{1+x^2} \times 1}{x^2}$

$= \dfrac{x^2 - (1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 2

1) a) $D_g = \mathbb{R}$

en $\pm\infty$, $g(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \dfrac{\cancel{x^2}(1+2/x+1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x^2)}$

$\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \dfrac{1+0+0}{1+0} = 1.$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 1.$

b) g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

on a : $g = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+2x+1 \\ v(x) = x^2+1 \end{cases}$, $\begin{cases} u'(x) = 2x+2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

donc $g'(x) = \left(\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right)(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x+1)\,2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2-\cancel{2x}}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

c) on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	1	↘	0	↗	2	↘	1

$g(-1) = \dfrac{(-1)^2+2\times(-1)+1}{(-1)^2+1} = 0$ et $g(1) = \dfrac{1^2+2\times1+1}{1^2+1} = 2$

d) $g(x) \geq 0$ car $\begin{cases} x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases}$

× Comme g est ↘ strictement sur $]-\infty,-1[$ et $g(-1)=0$,

$g(x) > 0$ sur $]-\infty,-1[$.

× $g(-1)=0$

× Comme g est ↗ strictement sur $]-1,1[$ et $g(-1)=0$,

$g(x) > 0$ sur $]-1,1[$.

× Comme g est ↘ strictement sur $]1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$,

$g(x) > 0$ sur $[1;+\infty[$.

Donc $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

2) a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc f est définie.

et $g(-1)=0$ donc le ln n'est pas défini.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\ln(g(x))\right) = 1+\ln 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} (1+\ln(g(x))) = 1+\ln 0 = -\infty$

c) On a : $f(x) = 1+\ln(g(x))$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
comme composée de fonctions continues et dérivables.
donc $f'(x) = g'(x) \times (\ln)'(g(x))$

$$= -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \times \frac{1}{\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\right)} = -\frac{2(x+1)(x-1)\times(x^2+1)}{(x+1)^2\times(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

d)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$1+\ln 2$	$\searrow$	1

$f(1) = 1 + \ln(g(1)) = 1 + \ln 2$

On a une asymptote horizontale $y=1$ en $\pm\infty$.

et une asymptote verticale en $x=-1$.

e) . Sur l'intervalle $]-\infty,-1[$, f est continue, strictement $\searrow$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 > 0$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty < 0$ donc par le tvi,

il existe un unique $\alpha \in]-\infty,-1[$ tq $f(\alpha)=0$.

. Sur l'intervalle $]-1,1[$, f est continue, strictement $\nearrow$

et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty < 0$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1+\ln 2 > 0$ donc par le tvi,

il existe un unique $\beta \in]-1,1[$ tq $f(\beta)=0$

× Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est $\searrow$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 > 0$

donc $f(x) > 0$ sur $[1;+\infty[$ donc ne s'annule pas.

Finalement, f s'annule 2 fois sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.