

PARTIEL D'ANALYSE 1

DURÉE : 2 HEURES

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Posons $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } |x-3| < 2\}$. Déterminer, si ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de E dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x^2+6x+8}$. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -4 , -2 et $+\infty$.
3. Calculer la limite de $\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{x^2+2x}$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ si $x > 0$, et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$. Etudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction g .
5. Posons $h(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Déterminer l'ensemble de définition de h et calculer sa dérivée.

Exercice 2 - Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 + \ln \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \right).$$

1. Dans cette question, on étudie la fonction auxiliaire g définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de g , et calculer les limites de $g(x)$ aux bornes de cet ensemble.
- (b) Calculer la dérivée de g .
- (c) Dresser le tableau de variation de g .
- (d) Déterminer le signe de $g(x)$, et pour quelle(s) valeur(s) de x on a $g(x) = 0$.
2. On revient maintenant à la fonction f définie au début de l'exercice.
 - (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
 - (b) Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$ et -1 .
 - (c) En utilisant la question 1.(b), calculer la dérivée de f .
 - (d) Dresser le tableau de variation de f en précisant les éventuelles asymptotes.
 - (e) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$?