EXAMEN D'ANALYSE 1

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/8

Exercice 1 -

- /2 1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -3 , $\frac{1}{3}$, $+\infty$, où $f(x) = \frac{2x^2+2x-12}{3x^2+8x-3}$.
- /2 2. Trouver les extrema éventuels de la fonction $g(x) = (3x+1)(x-1)^2$ et en déterminer la nature.
- /2 3. Etudier la convexité de la fonction $h(x) = e^{2\sqrt{x}+1}$ sur $]0, +\infty[$.
- /2 4. Donner le développement de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction $j(x) = \ln(2x+1)$.

Exercice 2 -

/7

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par

$$g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

- /2 1. Déterminer les limites de $g(x)$ quand x tend vers -1 , et quand x tend vers $+\infty$.
- /2 2. Calculer la dérivée de g .
- /1 3. En déduire le tableau de variation de g .
- /2 4. Démontrer que sur $] -1, +\infty[$ on a $0 < g(x) < e$.

/6

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- /1 5. (a) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.
- /0.5 (b) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ (on pensera à étudier le signe de la différence).
- /0.5 6. (a) Pour $x \in] -1, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; vérifier que $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.
- /1 (b) Donner (en fonction de x) le signe de $f''(x)$, et en déduire le sens de variation de f' .
- /0.5 (c) En admettant que $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, dresser le tableau de variation de f' .
7. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $] -1, +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0. Dans la suite du problème, on note α la solution non nulle.
- /1 8. (a) Etudier les variations de f .
- /0.5 (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- /0.5 (c) Dresser le tableau de variation de f .