

## EXAMEN – DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

**Exercice 1** - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 3y - 2z, -2x - 6y + 4z, 3x + 9y + 6z).$$

- 14
- 10.5 a) Écrire la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.  
 11.5 + 10.5 b) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et sa dimension. En déduire le rang de  $f$ .  
 10.5 + 10.5 c) Donner une famille génératrice de  $\text{Im } f$ . En déduire une base de  $\text{Im } f$ , en précisant sa dimension.  
 10.5 d) L'application  $f$  est-elle injective? Surjective?

13.5 **Exercice 2** - Dans cet exercice, on considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ .

- 13 1. Démontrer que  $A$  est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.  
 10.5 2. En déduire la solution du système linéaire  $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ -2x + 2y + z = -4 \\ x - y + 4z = 2 \end{cases}$

**Exercice 3** - Déterminer les valeurs réelles de  $c$  pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} -c & c & 0 & -c \\ 1 & 3c-1 & c & 1-c \\ c & -3-c & 1-c & 4 \\ c+1 & 2c-1 & c+1 & 4-c \end{bmatrix}.$$

13 **Exercice 4** - Considérons la matrice  $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

- 12.5 1. Calculer la matrice adjointe de  $B$ .  
 11 2. En déduire l'inverse de  $B$ .

12.5 **Exercice 5** - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de  $z$  dans la solution du système linéaire suivant :  $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -9 \\ 3x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$

13.5 **Exercice 6** - Considérons la matrice  $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ .

- 11.5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $C$ .  
 10.5 2. Calculer les valeurs propres de  $C$ , et préciser leur multiplicité.  
 11 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.  
 10.5 4. La matrice  $C$  est-elle diagonalisable?