Corrigé du partiel

Exercice 1

(a) E n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car :

1) $0 \notin E$: $0 \neq 3\times 0 - 4$

2) Si (x,y) et $(x',y') \in E$, $(x,y)+(x',y') \notin E$

car $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$ avec $\begin{cases} y = 3x-4 \\ y' = 3x'-4 \end{cases}$

et $y+y' = 3x-4+3x'-4$
$= 3(x+x') - 8$
$\neq 3(x+x') - 4$

3) Si $(x,y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, $\lambda(x,y) \notin E$ car :

$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ avec $y = 3x-4$

et $\lambda y = \lambda(3x-4)$
$= 3\lambda x - 4\lambda$
$\neq 3\lambda x - 4$

(b) F est un sev de $\mathbb{R}^3$ car :

$F \subset \mathbb{R}^3$ et

1) $0 \in F$: $-0+4\times 0+2\times 0 = 0$

2) Soient (x,y,z) et $(x',y',z') \in F$, donc $\begin{cases} -x+4y+2z=0 \\ -x'+4y'+2z'=0 \end{cases}$

$(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

et $-(x+x') + 4(y+y') + 2(z+z')$

$= (-x+4y+2z) + (-x'+4y'+2z')$

$= 0+0 = 0$

Donc $(x,y,z)+(x',y',z') \in F$.

3) Soient $(x,y,z)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ avec $-x+4y+2z=0$

On a : $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$

et $-(\lambda x)+4(\lambda y)+2(\lambda z)$

$=\lambda(-x+4y+2z)$

$=\lambda\times 0=0$

Donc $\lambda(x,y,z)\in F$.

(c) $u\in F$ car $-2+4\times 1+2\times(-1)=0$

$v\in F$ car $-(-2)+4\times(-3)+2\times(-5)=0$

$w\in F$ car $-0+4\times(-1)+2\times 2=0$

(d) On cherche à résoudre : $au+bv+cw=0$.

$$\begin{cases} 2\times a-2\times b=0 \\ 1\times a-3\times b-1\times c=0 \\ -1\times a+5\times b+2\times c=0 \end{cases} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad a=b \\ \Leftrightarrow \quad a-3a-c=0 \Leftrightarrow c=-2a \\ \hookrightarrow \quad -a+5a+2\times(-2a)=0 \Rightarrow \text{ok!} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in\mathbb{R} \\ b=a \\ c=-2a. \end{cases}$$

On a donc si $a=1$: $u+v-2w=0$

Ainsi, la famille $\{u,v,w\}$ est liée.

Montrons maintenant que $\{u,v\}$ est une base de F.

× $\{u,v\}$ est une famille libre car u et v non colinéaires.

× $\{u,v\}$ est génératrice car :

si $(x,y,z)\in F$, $x=4y+2z$

donc on cherche à résoudre $(4y+2z,y,z)=A\times u+B\times v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y+2z=2A-2B \\ y=A-3B \\ z=-A+5B \end{cases} \Rightarrow y+z=(A-3B)+(-A+5B)=2B$$

donc $B=\dfrac{y+z}{2}$

$$4x+2y=2A-2\times\frac{(y+z)}{2} \Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\left(4y+2z+(y+z)\right)$$
$$=\frac{5y+3z}{2}$$

et on a bien : $-\left(\frac{5y+3z}{2}\right)+5\left(\frac{y+z}{2}\right)=\frac{2z}{2}=z$ ok !

Donc $(4y+2z,y,z)=\left(\frac{5y+3z}{2}\right)u+\frac{(y+z)}{2}\times v$

Exercice 2 :

On a :

$$-3A^T=-3\begin{bmatrix}-1&4&0\\3&-7&2\\2&1&-1\end{bmatrix}^T=-3\begin{bmatrix}-1&3&2\\4&-7&1\\0&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-9&-6\\-12&21&-3\\0&-6&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix}1&-2&-3\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} & C \\ B\begin{bmatrix}0&1&-2\\2&3&-1\\-2&4&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2&-3&-2\\8&-3&-7\\6&10&7\end{bmatrix} & BC\end{array}$$

donc $BC=\begin{bmatrix}2&-3&-2\\8&-3&-7\\6&10&7\end{bmatrix}$

D'où $-3A^T+BC=\begin{bmatrix}3&-9&-6\\-12&21&-3\\0&-6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3&-2\\8&-3&-7\\6&10&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-12&-8\\-4&18&-10\\6&4&10\end{bmatrix}$

Exercice 3 :

$$\begin{bmatrix}1&-2&4&-1&2&-3\\1&-2&5&2&1&-1\\3&-6&14&3&5&-9\\-2&4&-5&-11&-5&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-L_1\\ L_3-3L_1\\ L_4+2L_1\end{array}\begin{bmatrix}1&-2&4&-1&2&-3\\0&0&1&3&-1&2\\0&0&2&6&-1&0\\0&0&3&9&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-2L_2\\ L_4-3L_2\end{array}\begin{bmatrix}1&-2&4&-1&2&-3\\0&0&1&3&-1&2\\0&0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&2&-6\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ L_4-2L_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ L_4/2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1+3L_4 \\ L_2-2L_4 \\ L_3+4L_4 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1-2L_3 \\ L_2+L_3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1-4L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4:

$$\begin{cases} -2x+4y-6z=-4 \\ x-y-2z=-2 \\ -3x+5y-4z=-2 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 4 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -L_1/2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2-L_1 \\ L_3+3L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3+L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1+2L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7z = -6 & \Leftrightarrow \quad x = -6 + 7z \\ y - 5z = -4 & \Leftrightarrow \quad y = -4 + 5z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions et pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$ où $\begin{cases} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est une solution particulière du système.} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une solution du système homogène associé} \end{cases}$

Exercice 5 :

$$\begin{cases} ax + 5y - 2z = -3a + 2 \\ x - y + z = a + 1 \\ -3x - 5y + az = 4a - 6 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 5 & -2 & -3a+2 \\ 1 & -1 & 1 & a+1 \\ -3 & -5 & a & 4a-6 \end{array}\right]$$

$$\updownarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ a & 5 & -2 & -3a+2 \\ -3 & -5 & a & 4a-6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 - aL_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 5+a & -2-a & -a^2-4a+2 \\ 0 & -8 & a+3 & 7a-3 \end{array}\right]$$

$$\updownarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ 0 & \boxed{-8} & a+3 & 7a-3 \\ 0 & 5+a & -2-a & -a^2-4a+2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2/-8 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & -(a+3)/8 & -(7a-3)/8 \\ 0 & 5+a & -2-a & -a^2-4a+2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}\\ \\ L_3-(5+a)L_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & -(a+3)/8 & (-7a+3)/8 \\ 0 & 0 & \frac{a^2-1}{8} & \frac{-a^2+1}{8} \end{array}\right]$$

si $a \neq \pm 1$,

$$\begin{array}{r}\\ \\ L_3/\left(\frac{a^2-1}{8}\right)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & -(a+3)/8 & (-7a+3)/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1-L_3 \\ L_2+\frac{a+3}{8}L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1+L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Il y a donc une solution unique:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -a \\ z = -1 \end{cases}$$

si $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1+L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On a donc une infinité de solutions:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \\ y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 - 1/2\, z \\ y = -1/2 + 1/2\, z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

si $a = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1+L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On a donc une infinité de solutions:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{4}z = \frac{5}{4} \\ y - \frac{1}{4}z = \frac{5}{4} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}z \\ y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}$$