Corrigé de l'examen d'Algèbre linéaire

Exercice 1:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

b) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z) = 0$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + 8z = 0 \\ -5x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

On lui associe la matrice augmentée suivante puis on résoud grâce au pivot de Gauss:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 + 5L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2/5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Une base de Ker f est donc $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et on a : Ker $f = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\mathbb{R}$.

Ainsi Ker f est de dimension 1.

En appliquant le thm du rang, on a :

dim Ker f + dim Im $f = 3$ d'où dim Im $f = 3 - 1 = 2$.

Donc le rang de f est 2.

c) On sait que $\mathrm{Im} f = \left\langle f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\-6\end{pmatrix}\right\rangle$$

Donc $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\-6\end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice.

Or, on sait par b) que dim Im $f = 2$.

Donc $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ est une base de Im f car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) f n'est pas injective car Ker $f \neq \emptyset$ (dim Ker $f = 1$ par b))

f n'est pas surjective car Im $f \neq \mathbb{R}^3$ (dim Im $f = 2 < 3$)

Exercice 2 :

1) $$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3-3L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_3 \\ \\ L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2-4L_1 \\ L_3+2L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 12 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2+2L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3+L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1-4L_3 \\ L_2+4L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 9 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1+L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

vérif:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} A^{-1}$$

$$A \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I$$

2) On a alors :

$$\begin{cases} -2x+y-3z=0 \\ 4x-y+2z=2 \\ -5x+2y-5z=-1 \end{cases} \iff AX=B \text{ avec } X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

D'où $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Donc la solution du système est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Exercice 3 :

On sait que la matrice est inversible ssi son déterminant est non nul

Calculons donc son déterminant :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & c & c-1 \\ 0 & c & 3 & c+2 \\ 2 & c+4 & 2c+1 & 2c \\ -2 & 2c-4 & 4 & 2c+7 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2 \\ L_4+L_2 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 4 & c & c-1 \\ 0 & c & 3 & c+2 \\ 0 & c & c+1 & c+1 \\ 0 & 2c & c+4 & 3c+6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2 \\ L_4-2L_2 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 4 & c & c-1 \\ 0 & c & 3 & c+2 \\ 0 & 0 & c-2 & -1 \\ 0 & 0 & c-2 & c+2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4-L_3 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 4 & c & c-1 \\ 0 & c & 3 & c+2 \\ 0 & 0 & c-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c+3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2 \times c \times (c-2)(c+3)$$

car la matrice est triangulaire supérieure.

Donc la matrice est inversible ssi $2c\,(c-2)(c+3) \neq 0$

$\Leftarrow$ $c \neq 0$ ou $c \neq 2$ ou $c \neq -3$

Exercice 4 :

1) On a :

$$\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times(-1)-0\times 4) & -((-3)\times(-1)-1\times 4) & ((-3)\times 0-1\times 2) \\ -((-2)\times(-1)-0\times(-1)) & (1\times(-1)-1\times(-1)) & -(1\times 0-1\times(-2)) \\ ((-2)\times 4-2\times(-1)) & -(1\times 4-(-3)\times(-1)) & (1\times 2-(-3)\times(-2)) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2) On a : $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \times \operatorname{adj} B$

et $\det B = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & C_3+C_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right)$

$$= 1 \times (-1)^{3+1} \times \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)\times 1 - 2\times 0 = -2$$

d'où $B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

<u>verif:</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} B^{-1} \\ B\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I \end{array}$$

<u>exercice 5:</u>

On a: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ -5x + y + 4z = 4 \end{cases} \iff AX = B$ avec $\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$

On sait que $y = \frac{\det A_2}{\det A}$ avec $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

et $\det A_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2+C_1 & C_3-2C_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 14 \end{bmatrix} \end{array}\right)$

$= (-1)\times(-1)^{2+1} \times \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}\right)$

$= 3\times 14 - (-1)\times(-3) = 42 - 3 = 39$

$$\det A = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{array}{ccc} & C_2+4C_1 & C_3-2C_1 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & -19 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1) \times (-1)^{2+1} \times \det\left(\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -19 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 5 \times 14 - (-19) \times (-3) = 70 - 57 = 13$$

D'où $y = \dfrac{39}{13} = 3$.

Exercice 6.

1) On a : $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 12 \\ -4 & 11-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-3-\lambda)(11-\lambda) - (-4) \times 12$$

$$= -33 + 3\lambda - 11\lambda + \lambda^2 + 48$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 15.$$

2) Les valeurs propres de C sont les zéros de P_C.

D'où $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4 = 2^2$$

$$\lambda = \frac{8 \pm 2}{2} = 5 \text{ ou } 3$$

Finalement, $P_C(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$

Donc les valeurs propres de C sont 5 et 3 et elles sont de multiplicité 1.

Dans ce cas, les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

3) • Calculons le vecteur propre associé à $\lambda = 5$:

$$C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 12y = 5x \\ -4x + 11y = 5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{6}x = \frac{2}{3}x.$$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc une base du sous-espace propre associé à $\lambda = 5$.

• Calculons le vecteur propre associé à $\lambda = 3$:

$$C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 12y = 3x \\ -4x + 11y = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8y$$

$$\Leftrightarrow x = 2y$$

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une base du sous-espace propre associé à $\lambda = 3$.

4) La matrice C est donc diagonalisable car P_C a deux racines simples.