

EXAMEN

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

1/4 Exercice 1 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x + 2y + 8z, -5x + 4y - 6z).$$

/0.5 a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

/1+0.5 b) Déterminer une base de $\text{Ker} f$ et sa dimension. En déduire le rang de f .

/0.5+1 c) Donner une famille génératrice de $\text{Im} f$. En déduire une base de $\text{Im} f$, en précisant sa dimension.

/0.5 d) L'application f est-elle injective? Surjective?

/3.5 Exercice 2 - Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

/3 1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.

/0.5 2. En déduire la solution du système linéaire $\begin{cases} -2x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + 2z = 2 \\ -5x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

/3
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & c & c-1 \\ 0 & c & 3 & c+2 \\ 2 & c+4 & 2c+1 & 2c \\ -2 & 2c-4 & 4 & 2c+7 \end{bmatrix}$$

/3.5 Exercice 4 - Considérons la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

/2.5 1. Calculer la matrice adjointe de B .

/1 2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de y dans la solution du

/2.5 système linéaire suivant : $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ -5x + y + 4z = 4 \end{cases}$

/3.5 Exercice 6 - Considérons la matrice $C = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$.

/1.5 1. Déterminer le polynôme caractéristique de C .

/0.5 2. Calculer les valeurs propres de C , et préciser leur multiplicité.

/1 3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

/0.5 4. La matrice C est-elle diagonalisable?